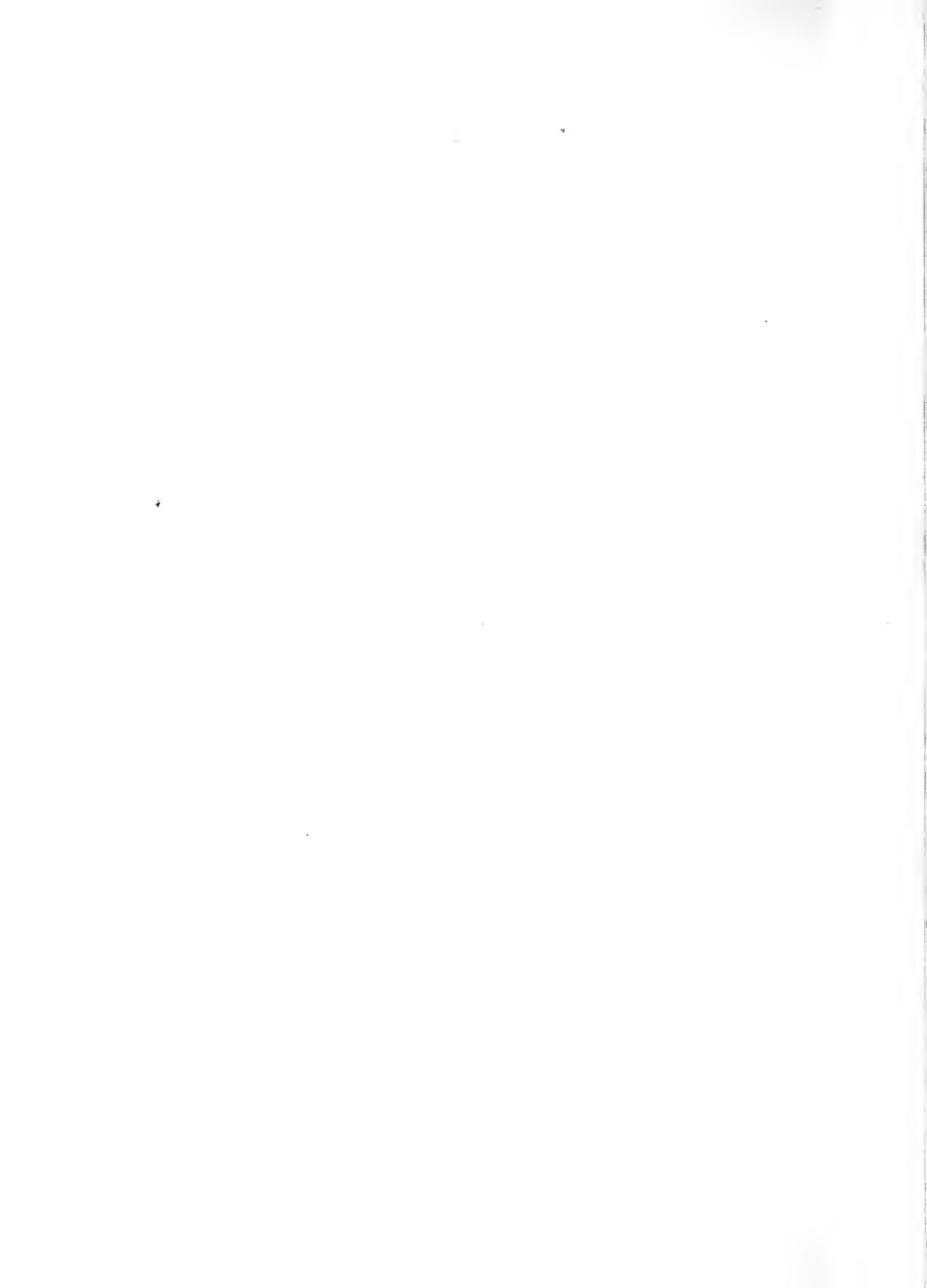


UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/s6journaldemat03liou>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.



JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, M. LEVY, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1907.

(62^e Volume de la Collection.)

PARIS,

Gauthier-Villars, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

Tous droits réservés.

95-734
-21/4/09

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

*Réduction d'un réseau de formes quadratiques
ou bilinéaires ;*

PAR M. CAMILLE JORDAN.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSEAUX DE FORMES BILINÉAIRES.

57. Soit

$$T_{lmv} = \sum \alpha_{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\alpha} \mu_{\beta} \nu_{\gamma}$$

une forme trilinéaire par rapport aux l variables λ , aux m variables μ , aux n variables ν .

Proposons-nous de la ramener à une forme canonique par des substitutions linéaires opérées sur chacun de ces systèmes de variables.

Cette question est analogue à celle que nous venons de traiter dans la première Partie de ce Mémoire; mais, quoique la méthode soit la même, les résultats qu'elle donne seront plus variés.

On peut écrire

$$T_{lmu} = \Sigma L_{\beta\gamma} \mu_{\beta} x_{\gamma},$$

les L étant des fonctions linéaires des λ . S'il en existe seulement l' qui soient indépendantes, on pourra les prendre pour variables indépendantes à la place d'une partie des λ et réduire ainsi le nombre des variables du premier système qui figurent dans la forme trilinéaire.

On réduira de même, s'il y a lieu, le nombre des variables μ et celui des variables x .

Nous supposons qu'aucune simplification de ce genre n'est possible. Nous dirons dans ce cas que T_{lmn} est *irréductible*.

On aura alors nécessairement $l \leq mn$. Car, les fonctions $L_{\beta\gamma}$ étant en nombre mn , il ne peut y avoir plus de mn de distinctes; mais il y en a au moins l , par hypothèse.

On aura de même $m \leq lu$, $u \leq lm$.

Si donc l'un des nombres l , m , n , par exemple l , se réduit à l'unité, on aura $m = u$, et

$$T_{unm} = \lambda \Sigma a_{\beta\gamma} \mu_{\beta} x_{\gamma} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, u).$$

Cette expression peut s'écrire

$$T_{unm} = \lambda \Sigma M_{\gamma} x_{\gamma},$$

les M_{γ} étant des fonctions distinctes des μ . En les prenant pour variables indépendantes, on obtiendra l'expression canonique

$$T_{unm} = \lambda \Sigma \mu_{\gamma} x_{\gamma}.$$

La solution du problème est beaucoup moins simple si l , m , n sont tous > 1 . Nous nous bornerons à l'étude des deux cas suivants :

1^o $l = 2$;

2^o $l = m = n = 3$.

§ I. — Réduction de T_{2mn} .

38. On a

$$T_{2mn} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2,$$

φ_1 , φ_2 étant bilinéaires par rapport aux μ et aux x .

La réduction de ce faisceau est un problème semblable à celui de la réduction d'un faisceau de formes quadratiques (première Partie, § 1). Mais, les Mémoires auxquels nous avons renvoyé (n° 3) ne contenant pas la solution de cette nouvelle question sous une forme absolument explicite, il conviendra d'entrer ici dans plus de détails qu'au paragraphe I.

Nous établirons que l'on peut, par des substitutions opérées uniquement sur les μ et les x , ramener simultanément φ_1 et φ_2 aux formes suivantes :

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 + \dots, \quad \varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 + \dots$$

les systèmes *simples* (φ'_1, φ'_2) , $(\varphi''_1, \varphi''_2)$, ... n'ayant aucune variable commune, et les deux fonctions φ'_1, φ'_2 qui composent l'un de ces systèmes ayant l'une des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \dots + \mu_{r+1} x_r, \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \dots + \mu_r x'_r, \\ \varphi'_2 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \dots + \mu_r x_{r+1}, \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \dots + \mu_r x_{r-1} + s(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_r x_r), \end{cases} \\ (4) \quad & \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \dots + \mu_r x_{r-1}, \\ \varphi'_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_r x_r. \end{cases} \end{aligned}$$

(Le coefficient s qui figure dans le système (3) est un invariant. Le système (4) peut être considéré comme une dégénérescence de (3) correspondant au cas où $s = \infty$.)

59. Démonstration. — Supposons d'abord que l'une au moins des deux fonctions φ_1, φ_2 , par exemple φ_2 , puisse être ramenée à ne contenir qu'une partie des variables μ, x ; il en sera ainsi : 1° si $m < n$; 2° si m, n étant égaux, le déterminant de φ_2 est nul.

On peut en effet écrire

$$\varphi_2 = \mathbf{M}_1 x_1 + \dots + \mathbf{M}_n x_n,$$

M_1, \dots, M_n étant des fonctions linéaires des μ . Soient M_1, \dots, M_k celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes : k sera au plus égal au plus petit des nombres m, n ; il sera moindre, si, m, n étant égaux, le déterminant est nul. Remplaçant d'ailleurs M_{k+1}, \dots , par leurs valeurs en M_1, \dots, M_k , il viendra

$$\varphi_2 = M_1 X_1 + \dots + M_k X_k,$$

les X étant des fonctions des x , linéairement distinctes.

Prenons pour variables indépendantes les M et les X à la place d'un nombre égal des variables μ et x . On pourra, sans altérer la forme acquise par φ_2 :

1° Opérer une substitution linéaire quelconque sur l'un des deux systèmes de variables M, X , pourvu qu'elle soit accompagnée de la substitution inverse, effectuée sur les variables de l'autre système;

2° Altérer arbitrairement les autres variables qui par hypothèse ne figurent plus dans φ_2 , et que nous désignerons par $x_1, x'_1, \dots; m_1, m'_1, \dots$.

Il n'existe pas nécessairement des variables de chacune des deux espèces x_1, m_1 ; mais il y en aura de l'une d'elles au moins. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y en ait de l'espèce x_1 .

40. Les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_1}, \dots$ sont des fonctions linéaires des variables M et m_1 . Elles sont distinctes, car, si elles étaient liées par une relation

$$a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + a' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_1} + \dots = 0,$$

une substitution linéaire qui remplace x_1, x'_1, \dots par $ax_1 + \dots, a'x_1 + \dots, \dots$ ferait disparaître x_1 de la fonction φ_1 ; le faisceau $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ ne serait donc pas irréductible.

41. Supposons d'abord que parmi ces dérivées il y en ait une, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ par exemple, qui contienne les variables m_1, m'_1, \dots . Prenons-la pour variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et appelons-la μ_1 ; les termes de φ_1 qui contiennent x_1 et μ_1 seront de la forme $\mu_1(x_1 + \dots)$;

par le changement de la variable x_1 , ils se réduiront à un seul, $\mu_1 x_1$; on aura alors $\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \varphi'_1$, φ'_1 ne contenant plus μ_1 ni x_1 .

Nous avons ainsi ramené le système proposé (φ_1, φ_2) à la somme d'un système simple ($\mu_1 x_1, 0$) [c'est un système de l'espèce (3), où $r = 1, s = 0$] et d'un autre système (φ'_1, φ_2) qui restera à réduire.

42. Supposons au contraire que les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots$ ne contiennent que les variables M. Prenons-les pour variables indépendantes à la place d'un nombre égal de celles-ci, et appelons-les μ_1, μ'_1, \dots , en continuant d'appeler M_1, M_2, \dots les autres variables de l'espèce M, s'il en reste.

On aura à ce moment

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \mu'_1 x'_1 + \dots + \varphi'_1,$$

φ'_1 ne contenant plus x_1, x'_1, \dots . Si elle contient encore des termes en μ_1, μ'_1, \dots , on les fera disparaître en changeant les variables x_1, x'_1, \dots .

Quant à φ_2 , elle est bilinéaire par rapport aux variables X d'une part, μ_1 et M d'autre part. Son déterminant n'étant pas nul, les dérivées

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu'_1}, \quad \dots; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial M_1}, \quad \dots$$

seront distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes au lieu des X et appelons-les $x_2, x'_2, \dots; X_1, \dots$; l'expression de φ_2 sera devenue

$$\mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \dots + M_1 X_1 + \dots = \mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \dots + \varphi'_2,$$

celle de φ_1 étant conservée.

45. On peut, sans altérer la forme des expressions obtenues :

1^o Opérer sur les M une substitution quelconque accompagnée de la substitution inverse faite sur les X;

2^o Opérer de même une substitution quelconque sur les x_2, x'_2, \dots

pourvu qu'on soumette les x_1, x'_1, \dots à la même substitution et les μ_1, μ'_1, \dots à la substitution inverse;

3° Enfin accroître les x_2 de fonctions linéaires des X , à condition d'opérer des changements correspondants convenables sur les variables M, μ_1, x_1 .

En effet, changeons, par exemple, x_2 en $x_2 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \dots$. Nous aurons introduit dans φ_2 les nouveaux termes

$$\mu_1(\alpha X_1 + \beta X_2 + \dots).$$

Mais on pourra les détruire en changeant M_1, M_2, \dots en

$$M_1 - \alpha \mu_1, \quad M_2 - \beta \mu_1, \quad \dots$$

Cette nouvelle opération introduira dans φ_1 des termes de la forme

$$- \mu_1 \left(\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial M_1} + \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial M_2} + \dots \right)$$

qu'on détruira à leur tour en changeant x_1 en

$$x_1 + \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial M_1} + \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial M_2} + \dots$$

Ces opérations vont nous permettre de réduire le système des deux fonctions partielles φ'_1, φ'_2 .

44. Les dérivées $\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x'_2}, \dots$ sont des fonctions des variables m et M . Supposons d'abord qu'elles ne soient pas distinctes. On pourra, par une substitution linéaire opérée sur les x_2 (et accompagnée de changements convenables opérés sur les x_1 et les μ_1), faire disparaître une de ces variables, telle que x_2 , de la fonction φ'_1 . Si donc nous posons pour abréger

$$\mu_1 x_1 + \dots + \varphi'_1 = \Phi_1, \quad \mu'_1 x'_2 + \dots + \varphi'_2 = \Phi_2,$$

le système (φ_1, φ_2) aura été réduit à la somme du système simple $(\mu_1 x_1, \mu_1 x'_2)$ et du système (Φ_1, Φ_2) qui restera à réduire.

43. Supposons en second lieu que, ces dérivées étant distinctes, l'une d'elles, la première par exemple, contienne les variables m . Prenons-la comme variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et désignons-la par μ_2 . On aura pour φ'_1 une expression de la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha x'_2 + \dots + \beta X_1 + \dots) + \varphi''_1,$$

φ''_1 étant indépendant de μ_2 et de x_2 . Mais, en combinant les opérations (2°) et (3°), on peut changer

$$x_2 + \alpha x'_2 + \dots + \beta X_1 + \dots \text{ en } x_2,$$

de sorte que les variables x_1, x_2, μ_1, μ_2 ne paraîtront plus dans φ_1 et φ_2 que dans les termes $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ et $\mu_1 x_2$. Nous aurons donc ici encore isolé un système simple

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 x_2).$$

46. Enfin, si ces dérivées sont distinctes et ne contiennent que les M , prenons-les pour variables indépendantes à la place d'une partie de celles-ci; désignons-les par μ_2, μ'_2, \dots , en continuant d'appeler M_1, M_2, \dots les autres variables M , s'il en reste. La fonction φ'_1 aura la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha X_1 + \dots) + \mu'_2(x'_2 + \alpha' X_1 + \dots) + \varphi''_1,$$

φ''_1 étant indépendant de $x_2, x'_2, \dots, \mu_2, \mu'_2, \dots$. Par des substitutions de l'espèce (3°), on la réduira à

$$\mu_2 x_2 + \mu'_2 x'_2 + \dots + \varphi''_1,$$

de telle sorte qu'on aura

$$\varphi_1 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + (\mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2) + \dots + \varphi''_1,$$

$$\varphi_2 = \mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \dots + M_1 X_1 + \dots$$

47. Par une suite de raisonnements toute semblable à la précédente, on pourra soit isoler un système simple de l'une des deux

formes

$$\begin{aligned} & (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3), \\ & (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3), \end{aligned}$$

soit mettre φ_1 et φ_2 sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) + (\mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2 + \mu'_3 x'_3) + \dots + \varphi_1^m, \\ \varphi_2 &= (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \quad \quad \quad + (\mu'_1 x'_2 + \mu'_2 x'_3) \quad \quad \quad + \dots \\ & \quad \quad \quad + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots \end{aligned}$$

Cette suite d'opérations ne pouvant se prolonger indéfiniment, on finira nécessairement par isoler un système simple.

48. Nous avons supposé, dans la démonstration qui précède, que l'une au moins des deux fonctions φ_1 , φ_2 ne contienne pas toutes les variables. Cette hypothèse ne sera pas réalisée, si, m étant égal à n , φ_1 et φ_2 ont des déterminants différents de zéro.

Considérons dans ce cas, au lieu de φ_2 , la fonction $\psi_2 = \varphi_2 - s\varphi_1$, la constante s étant choisie de telle sorte que le déterminant de ψ_2 soit nul. Cette condition fournit pour s une équation de degré n . Ayant pris pour s une racine de cette équation, on pourra, en appliquant à φ_1 et ψ_2 la méthode précédente, extraire du système (φ_1, ψ_2) un ou plusieurs systèmes simples. Puisque φ_1 contient par hypothèse toutes les variables, chacun de ces systèmes devra être de la forme

$$\varphi_1' = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r, \quad \psi_2' = \mu_2 x_1 + \dots + \mu_r x_{r-1}.$$

On pourra donc, du système

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \psi_2 + s\varphi_1),$$

extraire le système simple

$$(\varphi_1', \psi_2' + s\varphi_1'),$$

lequel est de l'espèce (3).

49. L'expression réduite du système (φ_1, φ_2) à laquelle nous

sommes arrivés en modifiant les seules variables μ et x , contient autant d'invariants que l'équation en s a de racines distinctes. Mais, si l'on soumet aussi les variables λ à des substitutions linéaires, on pourra donner des valeurs arbitrairement choisies à trois de ces invariants.

Soit en effet (φ'_1, φ'_2) un de nos systèmes simples. Le changement de λ_1, λ_2 en $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2$ changera $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ en

$$\lambda_1(\alpha\varphi'_1 + \gamma\varphi'_2) + \lambda_2(\beta\varphi'_1 + \delta\varphi'_2).$$

Supposons d'abord que le système simple considéré soit de l'es-
pèce (1)

$$\varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r, \quad \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \dots + \mu_{r+1} x_r.$$

L'effet de la substitution opérée sur les λ pourra être contrebalancé par d'autres substitutions opérées sur les μ et les x .

En effet, les substitutions qu'on peut faire subir aux λ dérivent des trois opérations élémentaires suivantes :

1^o Multiplication de λ_1, λ_2 par une même constante. Divisons les x par cette même constante; $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ restera inaltéré.

2^o Échange de λ_1 et de λ_2 . On n'aura qu'à remplacer $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r+1}, x_1, \dots, x_r$ par $\mu_2, \mu_1, \dots, \mu_{r+1}, x_r, \dots, x_1$.

3^o Changement de λ_1 en $\lambda_1 + l\lambda_2$; φ'_1 ne sera pas altéré, et φ'_2 sera changé en

$$\varphi'_2 + l\varphi'_1 = (\mu_2 + l\mu_1)x_1 + (\mu_3 + l\mu_2)x_2 + \dots + (\mu_{r+1} + l\mu_r)x_r.$$

Cette expression est un cas particulier de la suivante :

$$(\mu_2 + a\mu_1)x_1 + (\mu_3 + b\mu_2 + c\mu_1)x_2 + \dots + (\mu_{r+1} + k\mu_r + \dots + l\mu_1)x_r$$

qu'on ramène aisément à φ'_2 par des substitutions qui n'altèrent pas φ'_1 . En effet, on fera disparaître d'abord le terme $a\mu_1 x_1$ en changeant μ_2, x_1 en $\mu_2 - a\mu_1, x_1 + ax_2$; puis, sans rétablir ce terme supprimé, on fera évanouir les termes $(b\mu_2 + c\mu_1)x_2$ en changeant μ_3, x_2, x_1 en $\mu_3 - b\mu_2 - c\mu_1, x_2 + bx_3, x_1 + cx_3$; etc. Enfin, en modifiant μ_{r+1} , on fera disparaître les derniers termes $(k\mu_r + \dots + l\mu_1)x_r$.

Les mêmes considérations s'appliquent aux systèmes simples de la forme (2) qui ne diffèrent des précédents que par l'échange des μ avec les x .

30. Supposons enfin que le système simple considéré soit de la forme (3)

$$\varphi'_1 = A, \quad \varphi'_2 = B + sA,$$

en posant pour abrégier

$$A = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r, \quad B = \mu_2 x_1 + \dots + \mu_r x_{r-1}.$$

Soient a, b, c des constantes quelconques (a, c n'étant pas nuls). Il est aisé de vérifier que $aA + bB, cB$ peuvent être transformés simultanément en A, B .

Posons en effet $a = \alpha c, b = \beta c$. Par le changement de μ_k, x_k en $\alpha^{-k+1} \mu_k, c^{-1} \alpha^k x_k$, on transformera tout d'abord $aA + bB, cB$ en $A + \beta B, B$. On peut ensuite, sans altérer B , transformer en A l'expression $A + \beta B$, ou plus généralement l'expression

$$\begin{aligned} & \mu_1 x_1 + \mu_2 (x_2 + a x_1) \\ & + \mu_3 (x_3 + b x_2 + c x_1) + \dots + \mu_r (x_r + k x_{r-1} + \dots + l x_1) \end{aligned}$$

dont elle est un cas particulier.

En effet, on fera disparaître le terme $a x_1$ par le changement de x_2, μ_2 en $x_2 - a x_1, \mu_2 + a \mu_3$; puis les termes $b x_2 + c x_1$ en changeant x_3, μ_3, μ_1 en $x_3 - b x_2 - c x_1, \mu_3 + b \mu_4, \mu_1 + c \mu_3$, etc.; et enfin les termes $k x_{r-1} + \dots + l x_1$ par le changement de x_r .

De ce résultat, semblable à celui trouvé au n° 3 (pour les fonctions A_x^n, B_x^n), on peut tirer la même conséquence, à savoir qu'un changement de variables λ_1, λ_2 (combiné à des substitutions convenables opérées sur les μ et sur les x) a pour effet d'opérer sur les invariants s une même transformation homographique, ce qui permettra d'assigner à trois d'entre eux des valeurs déterminées, telles que 0, $\infty, 1$.

En dressant, d'après ce qui précède, le Tableau des types canoniques pour chaque système de valeurs de m, n , on devra, pour éviter les doubles emplois, assigner, par des considérations toutes semblables

à celles du n° 9, un ordre de succession bien défini aux invariants s , s' , ..., et réduire le premier à zéro, le second à ∞ , le troisième à l'unité.

31. On obtient ainsi le Tableau suivant :

Pour $m = 2$, $n = 1$, un type

$$(A) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_1.$$

Pour $m = 1$, $n = 2$, un type

$$(B) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2.$$

Pour $m = 2$, $n = 2$, deux types :

$$(C) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2,$$

$$(D) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1.$$

Pour $m = 3$, $n = 2$, deux types :

$$(E) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2),$$

$$(F) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

Pour $m = 2$, $n = 3$, deux types (déduits des précédents par l'échange des μ avec les x) :

$$(G) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(H) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3).$$

Pour $m = 3$, $n = 3$, six types :

$$(I) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3),$$

$$(J) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2),$$

$$(K) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) + \lambda_2 \mu_2 x_1,$$

$$(L) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3),$$

$$(M) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_3 x_3,$$

$$(N) \quad \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_3) + \lambda_2 (\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

etc.

§ II. — Réduction de T_{33} .

§2. L'expression

$$T_{333} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma = \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 + \lambda_3 \zeta_3$$

représente un réseau de formes bilinéaires des variables μ et ν , dérivé des trois formes génératrices $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Une substitution linéaire effectuée sur les paramètres λ revient à changer le choix de ces formes génératrices.

A chaque point $P = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ du plan des λ correspond une forme du réseau (définie à un facteur près). Son déterminant Δ est homogène et du troisième degré en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Les formes de déterminant nul correspondent donc aux points d'une cubique, $\Delta = 0$. L'une quelconque d'entre elles pourra, par un choix convenable des variables μ et ν , s'exprimer par une somme de deux termes

$$\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2.$$

Si non seulement Δ , mais tous ses mineurs sont nuls, elle sera réductible à un monome

$$\mu_1 \nu_1.$$

Mais le réseau ne contiendra de telles formes que dans certains cas exceptionnels.

Soient P_1, P_2 deux points quelconques; ψ_1, ψ_2 les formes correspondantes. Aux divers points de la droite $\omega = P_1 P_2$ correspondront les formes du faisceau

$$l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2,$$

que nous appellerons le *faisceau de la droite* ω .

Si parmi les six dérivées $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_k}$ il y en a p linéairement distinctes; si, d'autre part, parmi les six dérivées $\frac{\partial \psi_1}{\partial \mu_k}, \frac{\partial \psi_2}{\partial \mu_k}$ il y en a q distinctes, on pourra choisir les variables de telle sorte que dans les expressions de ψ_1 et de ψ_2 figurent seulement p des variables μ , et q des variables ν .

Si $p = q = 3$, le faisceau sera irréductible, et pourra être ramené à l'une des six formes canoniques I, J, ..., N du n° 31. Dans le cas contraire, il pourra se ramener à l'une des huit formes A, B, ..., H du même numéro.

Nous dirons que la droite considérée est de l'espèce (A), (B), etc., suivant que son faisceau a pour expression réduite A ou B, etc. Et nous considérerons l'espèce (A) comme plus simple que l'espèce (B); celle-ci sera plus simple que l'espèce (C), etc.

Aux points d'intersection de la droite ω avec la cubique Δ correspondent celles des formes du faisceau

$$l_1\psi_1 + l_2\psi_2$$

dont le déterminant est nul. Ce déterminant est homogène et du troisième degré en l_1, l_2 .

Si ω est de l'espèce (N), ce déterminant se réduit à $l_1l_2(l_1 + l_2)$. Il y a trois points d'intersection distincts, et les formes correspondantes sont $\psi_2, \psi_1, \psi_1 - \psi_2$.

Si ω est l'une des espèces (L) ou (M), ce déterminant se réduit à $l_1^2l_2$. Deux intersections sont réunies au point dont la forme est ψ_2 ; le dernier point d'intersection a pour forme ψ_1 .

Si ω est de l'une des espèces (J), (K), le déterminant étant égal à l_1^3 , les trois intersections se confondent en un seul point.

Enfin, si ω est de l'une des espèces (A), (B), ..., (I), le déterminant étant identiquement nul, la droite ω appartiendra tout entière à la cubique Δ .

Ces préliminaires posés, pour opérer la réduction du réseau à sa forme canonique, nous choisirons les côtés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du triangle de référence de la même manière qu'au n° 15, et nous aurons plusieurs cas à discuter successivement.

35. PREMIER CAS : Δ indécomposable, sans rebroussement.

La droite λ_3 rencontrant Δ en trois points d'inflexion distincts, son faisceau F sera du type (N).

Changeons, pour plus de symétrie, les signes de x_3 et de λ_2 , nous pourrions écrire

$$F = \lambda_1(\mu_1x_1 - \mu_3x_3) + \lambda_2(\mu_3x_3 - \mu_2x_2) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Ce faisceau contient trois formes de déterminant nul

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad -(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu_2 x_2 - \mu_1 x_1$$

correspondant aux trois points d'inflexion situés sur λ_3 .

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \lambda_3 + \lambda_1 & a_{21} \lambda_3 & a_{31} \lambda_3 \\ a_{12} \lambda_3 & a_{22} \lambda_3 - \lambda_2 & a_{32} \lambda_3 \\ a_{13} \lambda_3 & a_{23} \lambda_3 & a_{33} \lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, λ_1, λ_2 étant des tangentes d'inflexion, Δ doit se réduire à la forme

$$A \lambda_3^3 + \lambda_1 \lambda_2 (B \lambda_1 + C \lambda_2 + D \lambda_3);$$

d'où les équations de condition

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{22} &= 0, \\ a_{12} a_{21} &= a_{23} a_{32} = a_{31} a_{13}. \end{aligned}$$

Les deux produits $a_{12} a_{23} a_{31}$ et $a_{21} a_{32} a_{13}$ ne peuvent être nuls à la fois; car on aurait, en achevant l'identification, $A = 0$; Δ ne serait donc pas indécomposable.

D'ailleurs, ces deux produits s'échangent entre eux, si l'on permute les indices 1 et 2 en changeant en même temps le signe de λ_1, λ_2 (ce qui n'altère pas l'expression de \mathbf{F}). Il est donc permis de supposer que $a_{12} a_{23} a_{31}$ n'est pas nul.

On peut encore, sans altérer \mathbf{F} , multiplier $\mu_1, \mu_2, \mu_3, x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ par des facteurs de proportionnalité $l_1, l_2, l_3, u_1, u_2, u_3, v, v$ satisfaisant aux relations

$$l_1 u_1 = l_2 u_2 = l_3 u_3 = \frac{1}{v},$$

et du reste arbitraires. Par cette opération, a_{ik} sera multiplié par $l_i u_k$;

les produits $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{13}$ par $\frac{1}{v^2}$, a_{33} par $\frac{1}{v}$, et l'on pourra réduire a_{12} , a_{23} , a_{31} à l'unité. Nous devons poser à cet effet les équations

$$a_{12}t_1u_2 = a_{23}t_2u_3 = a_{31}t_3u_1 = 1$$

ou, en tirant les u des équations précédentes,

$$a_{12}t_1 = vt_2, \quad a_{23}t_2 = vt_3, \quad a_{31}t_3 = vt_1.$$

Ces équations détermineront les rapports $t_1 : t_2 : t_3$, si v satisfait à la relation

$$v^3 = a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{a_{12}a_{31}}{v^2} = \rho, \quad \frac{a_{33}}{v} = \sigma,$$

les coefficients a_{21} , a_{32} , a_{13} seront réduits à ρ et a_{33} à σ .

Nous obtenons ainsi pour φ_3 une expression canonique

$$\varphi_3 = \mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)$$

aux deux invariants ρ , σ .

Remarquons, toutefois, que, v étant donné par une équation cubique, ρ et σ ne sont pas rigoureusement déterminés. On pourrait les remplacer par $\theta\rho$, $\theta^2\sigma$, θ étant une racine cubique de l'unité.

Il existe, d'ailleurs, autant de manières distinctes de réduire le réseau à une forme canonique de l'espèce précédente que Δ possède de couples de points d'inflexion, soit 36 dans le cas général et 3 si Δ a un point double. Ces divers modes de réduction donneront en général des valeurs différentes pour ρ et σ .

§4. Voyons en particulier comment se modifient ces invariants lorsqu'on permute les trois points d'inflexion situés sur une même droite λ_3 et les tangentes correspondantes.

1° Échangeons d'abord λ_1 et λ_2 . Le réseau

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$$

sera changé en

$$\lambda_1 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3.$$

Or, si nous changeons

$$\mu_1, \mu_2, x_1, x_2, x_3, \lambda_3 \quad \text{en} \quad \mu_2, \mu_1, -x_2, -x_1, -x_3, -\frac{1}{\rho} \lambda_3$$

φ_2 s'échange avec φ_1 , et $\lambda_3 \varphi_3$ se transforme en $\lambda_3 \varphi'_3$, φ'_3 étant la fonction qui se déduit de φ_3 par le changement de φ, σ en $\frac{1}{\rho}, \frac{\sigma}{\rho}$.

2° On arrive au même résultat si l'on remplace la droite λ_1 par la tangente au troisième point d'inflexion.

Le déterminant Δ étant ici égal à

$$(\varphi^3 - \varphi\sigma + 1)\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3),$$

cette dernière tangente aura pour équation

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3 = 0.$$

À l'ancien triangle de référence $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ nous substituons celui formé par les trois droites

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3, \lambda_2, \lambda_3).$$

Les formes correspondantes à ses sommets seront :

$$\begin{aligned} \varphi'_1 = \varphi_1 &= \mu_1 x_1 - \mu_3 x_3, \\ \varphi'_2 = \varphi_1 + \varphi_2 &= \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, \\ \varphi'_3 = \varphi_3 + \sigma \varphi_1 &= \mu_1 (\sigma x_1 + x_2 + \varphi x_3) + \mu_2 (\varphi x_1 + x_3) + \mu_3 (x_1 + \varphi x_2). \end{aligned}$$

Si nous changeons $x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_3$ en $-x_3, -x_2, -x_1, \mu_3, \mu_1$ les deux premières se transforment respectivement en $\varphi_1, -\varphi_2$ et la dernière devient le produit de la constante $-\varphi$ par

$$\mu_1 \left(x_2 + \frac{1}{\rho} x_3 \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{\rho} x_1 + x_3 \right) + \mu_3 \left(x_1 + \frac{1}{\rho} x_2 + \frac{\sigma}{\rho} x_3 \right).$$

C'est une expression analogue à φ_3 , mais où φ, σ sont remplacés par $\frac{1}{\rho}, \frac{\sigma}{\rho}$.

55. Quelques cas particuliers méritent d'être signalés :

1° Si $\sigma = 0$, les trois tangentes d'inflexion sont concourantes ;

2° Δ aura un point double, si l'on a

$$2\tau(\rho^3 - \rho\sigma + 1) + \sigma^3 = 0;$$

3° Le réseau contiendra une forme monome si l'on peut déterminer les λ de telle sorte que tous les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \rho\lambda_3 \\ \rho\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \rho\lambda_3 & \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}$$

soient nuls.

Cela donne, entre autres équations de condition, celles-ci :

$$\lambda_3(\lambda_3 + \rho\lambda_2) = 0, \quad \lambda_3(\rho^2\lambda_3 + \lambda_2) = 0.$$

Si λ_3 était nul, les autres équations donneraient

$$\lambda_1\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \quad \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0;$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui est inadmissible.

On doit donc avoir

$$\lambda_3 + \rho\lambda_2 = 0, \quad \rho^2\lambda_3 + \lambda_2 = 0;$$

d'où

$$\rho^3 = 1, \quad \lambda_3 = -\rho\lambda_2.$$

Il viendra ensuite

$$0 = \lambda_1\lambda_2 + \rho\lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Mais $\lambda_2 = 0$ donnerait $\lambda_3 = 0$, solution rejetée. Donc $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Enfin, l'équation

$$\lambda_2(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2) + \rho\lambda_3^2 = 0$$

deviendra

$$0 = \lambda_2^2(-\rho\sigma + 2 + 1);$$

d'où

$$\sigma = 3\rho^2.$$

On vérifie aisément que ces valeurs de φ et de σ et des rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ annulent bien tous les mineurs de Δ .

36. 4° Pour que Δ soit indécomposable, ainsi que nous l'avons supposé, il faut que le coefficient de λ_3^3

$$\rho^3 - \rho\sigma + 1$$

soit $\neq 0$. S'il était nul, Δ serait le produit des trois droites

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3.$$

Les faisceaux de ces droites

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \lambda_3(\varphi_3 + \sigma\varphi_1)$$

sont irréductibles. Considérons, en effet, le premier. Les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\mu_2, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} = \mu_3, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\mu_1$$

sont linéairement distinctes. De même pour les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = -x_2, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} = x_3, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -x_1.$$

La même vérification peut se faire pour les deux autres faisceaux.

Réciproquement, tout réseau où Δ se décompose en trois droites D_1, D_2, D_3 , dont les faisceaux soient irréductibles, pourra d'une infinité de manières être ramené à la forme réduite ci-dessus, les invariants étant liés par la relation $\varphi^3 - \rho\sigma + 1 = 0$.

Soit, en effet, δ une droite arbitraire coupant D_1, D_2, D_3 en trois points distincts, qu'on peut considérer comme des points d'inflexion, où D_1, D_2, D_3 seront les tangentes. Si donc nous prenons D_1, D_2, δ pour les côtés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du triangle de référence, on pourra donner aux formes génératrices du réseau les expressions suivantes :

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 - \mu_1 x_3, \quad \varphi_2 = \mu_1 x_3 - \mu_2 x_2, \quad \varphi_3 = \sum_{ik} a_{ik} \mu_i x_k$$

et, Δ devant se réduire à la forme

$$\lambda_1 \lambda_2 (B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3),$$

on aura les relations

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12}a_{24} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{43},$$

et l'on pourra achever la réduction de φ_3 comme nous l'avons fait, à moins que les produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{43}$ ne soient nuls tous les deux. Mais ce cas ne peut se présenter si les faisceaux

$$\lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3, \quad \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3$$

des droites λ_1 , λ_2 sont irréductibles, ainsi que nous le supposons. Il faudra, en effet, que φ_3 contienne les variables μ_2 , x_2 qui ne figurent pas dans φ_2 , et aussi μ_1 , x_1 , qui ne figurent pas dans φ_1 . On ne pourra donc avoir à la fois ni $a_{12} = a_{43} = 0$, ni $a_{24} = a_{23} = 0$, ni $a_{21} = a_{31} = 0$, ni $a_{12} = a_{32} = 0$.

Mais d'autre part, si l'un des produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{43}$ est nul, les produits égaux $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{43}$ le seront aussi, et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre que $a_{21} = 0$.

Mais alors les conditions précédentes donneront successivement

$$a_{23} \geq 0, \quad a_{31} \geq 0, \quad \text{puis } a_{32} = 0, \quad a_{43} = 0 \text{ et enfin } a_{12} \geq 0, \text{ d'où } a_{12}a_{23}a_{31} \geq 0.$$

Il ne convient pas toutefois d'adopter comme type canonique des réseaux où Δ est formé de trois droites dont les faisceaux soient irréductibles l'expression réduite que nous venons de trouver. Car, la réduction pouvant se faire d'une infinité de manières, on ne saurait pas décider si deux réseaux sont équivalents ou non par la comparaison de leurs réduites (lesquelles contiennent une indéterminée). Il sera préférable d'employer un autre procédé de réduction exempt d'ambiguïté. Nous le donnerons plus loin, et il nous conduira à des expressions beaucoup plus simples que la précédente.

Nous maintiendrons donc l'inégalité

$$\varphi^3 - \varphi\sigma + 1 \geq 0$$

comme partie intégrante de la définition du premier type canonique

$$(1) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2) \\ + \lambda_3[\mu_1(x_2 + \tau x_3) + \mu_2(\tau x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \tau x_2 + \tau x_3)].$$

37. DEUXIÈME CAS : Δ est indécomposable, mais possède un point de rebroussement P et un point d'inflexion Q.

Prenons pour λ_1, λ_2 les tangentes à Δ aux points Q et P, pour λ_3 la droite PQ; Δ sera de la forme

$$A\lambda_3^2 + B\lambda_1^2\lambda_2 \quad (A \text{ et } B \geq 0).$$

D'autre part, λ_3 rencontrant Δ en deux points confondus en P $(=\lambda_2\lambda_3)$, et au point Q $(=\lambda_1\lambda_3)$, son faisceau F appartiendra à l'un des deux types (L), (M), ou, en changeant x_1, x_2 en $x_2, -x_1$, à l'un des deux types

$$(L)' \quad F = \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(M)' \quad F = \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2\mu_3 x_3.$$

Discutons successivement ces deux hypothèses.

38. 1° Supposons F de la forme (L).

Soit

$$z_3 = \sum a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice correspondant au sommet $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence : on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{21}\lambda_3 - \lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

expression à identifier avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$.

On en déduit d'abord

$$a_{11} = a_{33} = 0, \quad a_{21} = a_{12},$$

puis, en tenant compte de ces premières relations,

$$a_{12}a_{21} + a_{31}a_{13} = 0,$$

$$a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23} = 0,$$

$$a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} = \Lambda \geq 0.$$

Donc a_{12} , a_{21} , $a_{31}a_{13}$ seront ≥ 0 . Car, si l'une de ces quantités était nulle, les deux autres le seraient aussi; donc Λ serait nul, et Δ décomposable.

Mais on peut supposer $a_{22} = 0$. Changeons en effet μ_1 , x_1 en $\mu_1 + t\mu_2$, $x_1 + tx_2$, ce qui n'altère pas F ; a_{22} sera changé en $a_{22} + t(a_{12} + a_{21})$, expression qui s'annulera pour une valeur convenable de la constante t .

Changeons enfin μ_1 , μ_2 , μ_3 , x_1 , x_2 , x_3 , λ_1 , λ_2 en $t_1\mu_1$, $t_2\mu_2$, $t_3\mu_3$, u_1x_1 , u_2x_2 , u_3x_3 , $\frac{\lambda_1}{t_1u_2}$, $\frac{\lambda_2}{t_2u_2}$, les indéterminées t , u étant liées par les relations

$$t_1u_2 = t_2u_1, \quad t_2u_2 = t_3u_3.$$

F restera inaltéré, et a_{12} , a_{13} , a_{32} seront multipliés par les facteurs arbitraires

$$t_1u_2, \quad t_1u_3 = \frac{t_1t_2}{t_3}u_2, \quad t_3u_2.$$

On pourra donc les choisir de manière à réduire à l'unité a_{12} , a_{13} et aussi a_{32} , s'il n'est pas nul. Les équations de condition donneront les valeurs des autres coefficients.

$$a_{21} = a_{12} = 1, \quad a_{31} = -a_{13} = -1, \quad a_{23} = a_{32} = 1 \text{ ou } 0.$$

Nous obtenons ainsi les deux types réduits :

$$(II) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_1 + x_3) + \mu_3(-x_1 + x_2)], \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2x_1 - \mu_3x_1]. \end{cases}$$

Ces deux types sont bien distincts : on peut d'ailleurs le confirmer comme il suit :

Changeons le rôle des λ et des μ en considérant $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3$ comme une forme bilinéaire des variables λ, x , dépendant des paramètres μ ; son déterminant sera une cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à Δ . Or on aura pour le type (II)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2 + \mu_3^2) + \mu_2(\mu_3^2 - \mu_2^2),$$

cubique à un seul point double; et pour le type (III)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2 + \mu_3^2),$$

système de trois droites.

59. 2° Supposons F de la forme (M)'.

Son expression ne changera pas si l'on opère sur μ_1, μ_2 et sur x_1, x_2 une même substitution linéaire, en divisant λ_1 par le déterminant de cette substitution. Par cette opération on pourra, dans l'expression de la troisième forme génératrice

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k,$$

rendre nul le coefficient a_{11} . En effet, par le changement de μ_2, x_2 en $\mu_2 + t\mu_1, x_2 + tx_1$ on le change en $a_{11} + t(a_{12} + a_{21}) + t^2 a_{22}$, expression qu'on pourra rendre nulle si $a_{22} \neq 0$. Si a_{22} était nul, on l'échangerait avec a_{11} en permutant μ_1, x_1 avec μ_2, x_2 .

Soit donc $a_{11} = 0$. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21}\lambda_3 - \lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Identifiant cette expression avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$, il viendra

$$a_{33} = 0, \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{12}a_{21} = 0, \quad \text{d'où} \quad a_{12} = a_{21} = 0, \\ a_{23}a_{31} - a_{32}a_{13} = 0, \quad a_{13}a_{22}a_{31} = A = 0.$$

Multiplions $\mu_1, \mu_2, \mu_3, x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ par $l_1, l_2, l_3, u_1, u_2, u_3$

$\frac{1}{t_1 u_2}, \frac{1}{t_3 x_3}$, les facteurs t, u étant liés par l'unique relation $t_1 u_2 = t_2 u_1$. On pourra les déterminer de manière à réduire à l'unité a_{13}, a_{22}, a_{31} , et aussi a_{32} , si ce dernier coefficient n'est pas nul. Les relations précédentes donneront enfin $a_{23} = a_{32}$.

Assignant successivement à a_{32} les valeurs 1 et 0, nous obtiendrons les deux types réduits :

$$(IV) \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3 [\mu_1 x_3 + \mu_2 (x_2 + x_3) + \mu_3 (x_1 + x_2)],$$

$$(V) \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

Chacun d'eux contient une droite monome λ_2 ; les réseaux des types (II) et (III) n'en contenaient aucune.

Formons, d'autre part, comme au numéro précédent, la cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à Δ ; on aura pour le type (IV)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_2 \mu_3) \quad (\text{droite et conique}),$$

et pour le type (V)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2) \quad (\text{trois droites}).$$

Ce caractère invariant distingue nettement ces deux types l'un de l'autre.

60. Passons à l'examen des cas où Δ est décomposable ou identiquement nul.

TROISIÈME CAS : Δ admet en facteur une droite d'espèce (A).

Prenons-la pour λ_3 . Son faisceau F aura pour expression

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_1 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice. Nous pourrions la simplifier par les opérations suivantes qui n'altèrent pas F :

1° On peut remplacer φ_3 par une autre forme $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changer arbitrairement les variables μ_3, x_2, x_3 que F ne contient pas;

3° Opérer sur μ_1, μ_2 une substitution linéaire arbitraire (accompagnée de la substitution inverse effectuée sur λ_1 et λ_2).

61. Supposons d'abord $a_{33} \neq 0$. Par les opérations (2) on réduira a_{33} à l'unité, $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ à zéro.

Par l'opération (1) on détruira ensuite a_{11}, a_{21} ; on aura alors

$$\varphi_3 = (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2)x_2 + \mu_3x_3,$$

a_{12} et a_{22} ne peuvent être nuls à la fois, car φ_3 doit contenir x_2 . Par une opération (3) on le réduira à $\mu_2x_2 + \mu_3x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

$$(VI) \quad \lambda_1\mu_1x_1 + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_2x_2 + \mu_3x_3)$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^2 \lambda_1$$

est formé d'une droite double λ_3 d'espèce (A) et d'une droite simple λ_1 , d'espèce (G).

Soit $a_{33} = 0$, mais $a_{32} \neq 0$. Ce cas se ramène au précédent par l'échange des variables x_2, x_3 .

62. Soit enfin $a_{33} = a_{32} = 0$. Comme φ_3 doit contenir μ_3 , a_{31} sera $\neq 0$; et, par le changement de μ_3 , on pourra réduire a_{11}, a_{21}, a_{31} à 0, 0, 1.

D'autre part, φ_3 contiendra x_2, x_3 , respectivement multipliés par $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2, a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2$. Ces deux fonctions sont linéairement distinctes; car, si elles ne l'étaient pas, soit l leur rapport, x_2 et x_3 ne figureraient dans φ_3 que par la combinaison $x_2 + lx_3$, et le réseau ne serait pas irréductible.

On pourra donc par une substitution linéaire opérée sur μ_1, μ_2 (opération 3) réduire les termes en x_2, x_3 à la forme plus simple $\mu_2x_2 + \mu_1x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

$$(VII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce (A).

Dans chacun des deux types (VI) et (VII) les mineurs de Δ s'annulent tous pour $\lambda_3 = 0$. Il existe donc dans le réseau une infinité de formes monomes.

65. QUATRIÈME CAS : Δ admet en facteur une droite d'espèce (B).

Ce cas ne diffère du précédent que par l'échange des deux systèmes de variables μ et x . Cet échange nous fournira deux nouveaux types :

$$(VIII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_1 x_2 + \lambda_3 (\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(IX) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_1 x_2 + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

Dans le premier, Δ sera formé d'une droite double d'espèce (B) et d'une droite simple d'espèce (E). Dans le dernier, Δ sera une droite triple.

Chacun de ces deux réseaux contiendra d'ailleurs une infinité de formes monomes.

64. CINQUIÈME CAS : Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est d'espèce (C).

La droite λ_3 aura ici pour faisceau

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. Pour la simplifier, nous disposons des opérations suivantes qui laissent F inaltéré :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables x_3, μ_3 ;

3° Échange des indices 1 et 2;

4° Remplacement de $\mu_i, x_i, \lambda_1, \lambda_2$ par $t_i \mu_i, u_i x_i, \frac{\lambda_1}{t_1 u_1}, \frac{\lambda_2}{t_2 u_2}; t_i, u_i$ étant des facteurs de proportionnalité arbitraires.

63. Supposons en premier lieu $a_{33} \geq 0$. On réduira a_{33} à l'unité, $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ à zéro (opération 2), puis a_{11}, a_{22} à zéro (opération 1).

Enfin, par l'opération (4), on réduira à l'unité ceux des coefficients restants, a_{12}, a_{21} , qui ne sont pas nuls. Comme on peut d'ailleurs échanger a_{12} avec a_{21} (opération 3), on n'aura que trois cas à distinguer :

1° $a_{12} = a_{21} = 1$, d'où le type

$$(X) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3 (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2)$$

est formé d'une droite et d'une conique qui se coupent; λ_1, λ_2 sont les tangentes en leurs points d'intersection.

Le réseau contient deux formes monomes.

2° $a_{12} = 1, a_{21} = 0$. On a le type

$$(XI) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

est formé de trois droites non concourantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, d'espèces (E), (G), (C) respectivement.

Il y a deux formes monomes.

3° $a_{12} = a_{21} = 0$. On a le type

$$(VII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 \mu_3 x_3,$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Les droites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont toutes les trois de l'espèce (G).

Il y a trois formes monomes.

66. Supposons maintenant $a_{33} = 0$; φ_3 devant contenir μ_3 et x_3 , ni a_{31} et a_{32} , ni a_{13} et a_{23} ne peuvent être nuls à la fois. Donc l'un au moins des quatre produits $a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{32}$, $a_{31}a_{23}$, $a_{32}a_{23}$ sera > 0 ; et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre qu'on ait

$$a_{13}a_{31} \geq 0 \quad \text{ou} \quad a_{13}a_{32} \geq 0,$$

d'où $a_{13} \geq 0$ dans tous les cas, et a_{31} ou $a_{32} > 0$.

Si a_{13} et a_{31} sont tous deux ≥ 0 , on les réduira à l'unité, et a_{11} , a_{12} , a_{21} à zéro (opération 2); on annulera également a_{22} (opération 1). Enfin on réduira à l'unité ceux des deux coefficients restants a_{23} , a_{32} qui ne sont pas nuls (opération 4).

On obtient ainsi quatre types, représentés par la formule

$$(XIII \text{ à XVI}) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 [\mu_1 x_3 + a_{23} \mu_2 x_3 + \mu_3 (x_1 + a_{32} x_2)]$$

et correspondant aux quatre systèmes de valeurs $a_{23} = 0, 1$, $a_{32} = 0, 1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & a_{32} \lambda_3 \\ \lambda_3 & a_{23} \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^2 (\lambda_2 + a_{23} a_{32} \lambda_1)$$

sera le produit de la droite double λ_3 , d'espèce (C), et d'une droite simple. Celle-ci sera :

D'espèce (I), si.....	$a_{23} = a_{32} = 1$
» (G), si.....	$a_{23} = 0, \quad a_{32} = 1$
» (E), si.....	$a_{23} = 1, \quad a_{32} = 0$
» (D), si.....	$a_{23} = a_{32} = 0$

Chacun de ces quatre réseaux contient deux formes monomes.

Le cas où $a_{13}a_{31}$ serait nul, mais $a_{23}a_{32} > 0$, se ramènerait au précédent par l'échange des indices 1 et 2.

67. Reste à discuter le cas où $a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0$. L'un au moins des produits $a_{13}a_{32}$, $a_{23}a_{31}$ sera < 0 ; et, comme on peut échanger les indices 1 et 2, il est permis de supposer $a_{13}a_{32} < 0$.

On aura dès lors $a_{31} = a_{23} = 0$. On pourra réduire a_{11} , a_{22} à zéro

par l'opération 1, a_{12} également par le changement de la variable μ_3 . Enfin, par l'opération 4, on réduira à l'unité les coefficients a_{13} , a_{32} , et aussi le coefficient a_{21} , si ce dernier n'est pas nul.

Si $a_{21} = 1$, on aura obtenu le type

$$(XVII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2),$$

où $\Delta = \lambda_3^3$ est une droite triple d'espèce (C).

Ce réseau contient deux formes monomes.

Si $a_{21} = 0$, on aura le type

$$(XVIII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2).$$

Ici Δ est identiquement nul.

68. SIXIÈME CAS : Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce (D).

Le faisceau de λ_3 sera

$$F = \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1.$$

On dispose, pour simplifier l'expression de

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} \mu_i x_k,$$

des opérations suivantes, qui laissent F inaltéré :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables μ_3, x_3 ;

3° Changement de μ_1, λ_2 en $\mu_1 - t\mu_2, \lambda_2 + t\lambda_1$;

4° Changement de x_2, λ_2 en $x_2 - tx_1, \lambda_2 + t\lambda_1$;

5° Changement de $\mu_i, x_k, \lambda_1, \lambda_3$ en $t_i \mu_i, u_k x_k, \frac{\lambda_1}{t_1 u_1}, \frac{\lambda_3}{t_2 u_1}$, les facteurs t_i, u_i étant liés par la relation $t_1 u_1 = t_2 u_2$.

69. Supposons d'abord $a_{33} \neq 0$.

Par l'opération 2 on réduira $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ à 0, 0, 0, 0, 1; puis on annulera a_{11}, a_{21} par l'opération 1.

Cela posé, si a_{12} n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 (opération 4), puis annuler a_{22} par l'opération 3. On aura ainsi le type

réduit

$$(XIX) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_1x_2 + \mu_3x_3),$$

où la cubique

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3)$$

est formée de la droite λ_3 et d'une conique tangente.

Si $a_{12} = 0$, mais $a_{22} \geq 0$, on pourra le rendre égal à l'unité, et l'on obtiendra le type

$$(XX) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_2x_2 + \mu_3x_3).$$

Ici la cubique

$$\Delta = \lambda_3\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_1)$$

est formée de trois droites concourantes

λ_3 , d'espèce (D),

λ_1 , d'espèce (G),

$\lambda_3 + \lambda_1$, d'espèce (E).

Resterait l'hypothèse $a_{12} = a_{22} = 0$; mais elle doit être rejetée; car le réseau contiendrait la droite λ_1 , dont le faisceau, se réduisant à $\lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3\mu_3x_3$, serait d'espèce (C); λ_3 ne serait donc pas le facteur le plus simple de Δ .

70. Passons au cas où $a_{33} = 0$.

Si $a_{13} \neq 0$, on pourra annuler a_{23} (opération 3); puis rendre a_{13} égal à 1, a_{12} égal à 0, et a_{11} égal à a_{22} (opération 2); faire disparaître ensuite a_{11} , a_{22} , a_{21} (opération 1).

Cela posé, si a_{32} n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1, puis annuler a_{31} (opérations 2 et 4). On obtient ainsi le type

$$(XXI) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_1x_3 + \mu_3x_2),$$

où

$$\Delta = \lambda_3^2\lambda_2$$

est formé d'une droite double λ_3 d'espèce (D) et d'une droite simple λ_2 d'espèce (I).

Si a_{32} est nul, a_{41} ne le sera pas, car φ_3 doit contenir μ_3 . Par l'opération 5 on le rendra égal à 1, ce qui donne le type

$$(XXII) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_3x_1 + \mu_1x_3).$$

Ici

$$\Delta = -\lambda_3^2\lambda_1$$

est formé de la droite double λ_3 , d'espèce (D), et de la droite simple λ_1 , d'espèce (E).

71. Reste le cas où $a_{33} = a_{43} = 0$.

Comme φ_3 doit contenir x_3 , a_{23} ne sera pas nul.

Si l'on a également $a_{32} \geq 0$, on pourra annuler a_{31} par l'opération 4; puis par le changement de μ_3 réduire a_{12} à zéro; par celui de x_3 réduire a_{21} , a_{22} à 0, a_{11} ; puis par l'opération 1 faire disparaître les termes multipliés par a_{11} . Enfin, par l'opération 5 on réduira à l'unité les seuls coefficients restants a_{23} , a_{32} .

On aura ainsi le type

$$(XXIII) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_2x_3 + \mu_3x_2).$$

$$\Delta = -\lambda_3^2\lambda_1$$

représentera ici une droite double, d'espèce (D), et une droite simple, d'espèce (G).

Enfin, si a_{32} est nul, a_{31} ne le sera pas, car φ_3 doit contenir μ_3 . Par le changement de μ_3 et de x_3 on pourra annuler a_{11} , a_{21} , a_{22} . Par l'opération 5 on rendra a_{23} , a_{31} égaux à 1, ainsi que a_{12} , si ce dernier coefficient n'est pas nul.

On aura, pour $a_{12} = 1$, le type

$$(XXIV) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2\mu_2x_1 + \lambda_3(\mu_1x_2 + \mu_2x_3 + \mu_3x_1).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce D.

Enfin, pour $a_{12} = 0$, on a le type

$$(XXV) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où Δ est identiquement nul.

72. Remarque. — On vérifie aisément que, pour les réseaux (XIX) à (XXV) que fournit l'étude du sixième cas, les mineurs de Δ ne peuvent s'annuler à la fois que pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Ils ne contiennent donc qu'une forme monome. Ce caractère invariant les sépare des réseaux (VI) à (XVIII), qui en contiennent au moins deux.

73. SEPTIÈME CAS : Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce (E). — On a ici

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

On peut simplifier φ_3 par les opérations suivantes, qui n'altèrent pas F :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement de la variable x_3 ;

3° Changement de μ_2, x_2 en $\mu_2 - t\mu_3, x_2 + tx_1$;

4° Changement de μ_2, λ_1 en $\mu_2 - t\mu_1, \lambda_1 + t\lambda_2$;

5° Changement de $\mu_i, x_i, \lambda_1, \lambda_2$ en $t_i \mu_i, u_i x_i, \frac{\lambda_1}{t_1 u_1}, \frac{\lambda_2}{t_2 u_1}$,

les t, u étant liés par la seule relation $t_2 u_1 = t_3 u_2$.

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} \mu_i x_k.$$

Toutes les opérations précédentes laissent le coefficient a_{23} invariable ou le multiplient par un facteur arbitraire autre que zéro. Nous aurons donc à discuter les deux hypothèses distinctes

$$a_{23} = 1, \quad a_{23} = 0.$$

74. Première hypothèse : $a_{23} = 1$. — On pourra annuler a_{31} et a_{13} (opérations 3 et 4); puis annuler a_{22} et rendre a_{24} égal à a_{32} (opéra-

tion 2); cela fait, l'opération 1 pourra faire disparaître a_{41}, a_{21}, a_{32} ; enfin, par l'opération 5 on rendra égaux à 1 ceux des coefficients restants a_{12}, a_{31} qui ne sont pas nuls.

Ils ne peuvent être nuls à la fois; car, φ_3 se réduisant à $\mu_2 x_3$, Δ contiendrait en facteur la droite λ_2 , dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_2 x_3$$

est de l'espèce D; elle serait donc plus simple que λ_1 .

Restent les trois solutions

$$a_{12} = a_{31} = 1; \quad a_{12} = 0, a_{31} = 1; \quad a_{12} = 1, a_{31} = 0.$$

La première donne le réseau

$$(XXVI) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 (\lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent.

La deuxième, le réseau

$$(XXVII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

y représente trois droites non concourantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivement d'espèces (H), (E), (E).

La dernière, le réseau

$$(XXVIII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$

ici encore

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

sera le produit de trois droites non concourantes; mais elles seront des espèces (I), (G), (E).

73. *Deuxième hypothèse* : $a_{23} = 0$. — 1. Supposons d'abord

$$a_{13} \geq 0, \quad a_{33} \geq 0.$$

On annulera a_{31} et l'on rendra a_{32} égal à a_{21} par le changement de la variable x_3 ; puis par l'opération 1 on fera disparaître a_{11} , a_{21} , a_{32} .

1° Si maintenant $a_{22} < 0$, on fera disparaître a_{12} par l'opération 4; enfin l'on rendra a_{13} , a_{33} , a_{22} égaux à 1 (opération 5). Et l'on aura le type réduit

$$(XXIX) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)$$

représente une droite et une conique tangentes.

2° Si a_{22} est nul, a_{12} ne pourra l'être; car la droite λ_2 aurait pour faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 (a_{13} \mu_1 x_3 + a_{33} \mu_3 x_3)$$

qui est évidemment réductible à l'espèce (C). Ce serait donc un diviseur de Δ , plus simple que λ_3 .

Cela posé, on pourra réduire a_{13} , a_{33} , a_{12} à l'unité, ce qui donne le type

$$(XXX) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_1 x_3 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (E), (G), (E).

(En effet, considérons la droite $\lambda_2 - \lambda_3$ par exemple. Son faisceau sera

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 [\mu_2 x_1 + (\mu_1 + \mu_3)(x_2 + x_3)]$$

et se ramène immédiatement à E en changeant μ_3 , x_2 en $\mu_3 - \mu_1$, $x_2 - x_3$).

76. II. Supposons en second lieu $a_{13} = 0$, $a_{33} = 0$. On pourra, en changeant la variable x_3 , réduire a_{11} , a_{12} , a_{13} à 0, 0, 1.

1° Cela posé, si $a_{22} \geq 0$, on rendra a_{21} égal à a_{32} (opération 3); puis on fera disparaître ces coefficients (opération 1). Enfin, par l'opération 5, on réduira à l'unité a_{22} , et aussi a_{31} , si ce dernier coefficient n'est pas nul.

Si $a_{31} = 1$, on aura le type

$$(XXXI) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

$\Delta = \lambda_3 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)$ représente encore trois droites concourantes.

La première est de l'espèce (E) et les deux autres de l'espèce (G).

Considérons, en effet, l'une des deux autres, $\lambda_2 \pm \lambda_3$. Son faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 \mp (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1))$$

dépend seulement des cinq variables

$$\mu_1, \quad \mu_2 \mp \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3.$$

D'ailleurs, il contient une forme monome $\mu_1 x_1$. Il est donc de l'espèce (G).

Si $a_{31} = 0$, on a le type

$$(XXXII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2).$$

$\Delta = \lambda_2^2 \lambda_3$ est le produit de la droite simple λ_3 d'espèce (E) par la droite double λ_2 . Celle-ci est d'espèce (G), car son faisceau dépend des cinq variables $\mu_1, \mu_2, x_1, x_2, x_3$ et contient la forme monome $\mu_1 x_1$.

2° Si a_{22} est nul ($a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{23}, a_{33}$ étant déjà réduits à 1, 0, 0, 0, 0), on pourra, par l'opération 1, annuler a_{21} ; puis, si a_{32} n'est pas nul, annuler a_{31} (opération 3); enfin, réduire a_{32} à l'unité (opération 5). On aurait alors le réseau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2)$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_2).$$

Mais ce cas est à rejeter, car la droite $\lambda_3 + \lambda_2$, dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2)$$

ne dépend que de quatre variables, serait plus simple que la droite λ_3 .

Si a_{32} était nul, φ_3 se réduisant à $\mu_4 x_3 + a_{31} \mu_3 x_1$, le faisceau de λ_2

$$\lambda_1 \mu_4 x_1 + \lambda_3 (\mu_4 x_3 + a_{31} \mu_3 x_1)$$

ne dépendant que de quatre variables au plus, Δ admettrait un facteur linéaire λ_2 plus simple que λ_3 . Ce cas est donc encore à rejeter.

77. III. Supposons, enfin, $a_{13} = 0$ (avec $a_{23} = 0$). La forme φ_3 devant contenir x_3 , a_{33} sera $\neq 0$. En changeant la variable x_3 , on pourra le ramener à l'unité, annuler a_{31} et rendre a_{32} égal à a_{21} ; puis, par l'opération 1, faire disparaître a_{11} , a_{21} , a_{32} ; φ_3 sera ainsi ramené à la forme

$$a_{12} \mu_1 x_2 + a_{22} \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3.$$

Les coefficients a_{12} , a_{22} ne peuvent être nuls tous deux; car la droite λ_2 , dont le faisceau se réduirait à

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_3 x_3$$

et ne contiendrait que quatre variables, serait un facteur de Δ plus simple que λ_3 .

D'autre part, si $a_{22} \geq 0$, l'opération 4 permet d'annuler a_{12} . Donc, un seul des deux coefficients a_{12} , a_{22} différera de zéro. L'opération 5 permettra de le rendre égal à l'unité. Faisant donc successivement $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$ et $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$, nous obtiendrons les deux types

$$(XXXIII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_3 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(XXXIV) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3).$$

Dans le premier, $\Delta = -\lambda_1 \lambda_3^2$. Le facteur double λ_3 est de l'espèce (E) et le facteur simple λ_1 de l'espèce (H).

Dans le second, $\Delta = -\lambda_2 \lambda_3^2$; λ_3 sera encore de l'espèce (E); mais le facteur simple λ_2 sera de l'espèce (G).

78. HUITIÈME CAS : Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce (F). — Le faisceau F de λ_3 est ici de la forme

$$\lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

Il reste inaltéré par les opérations suivantes, dont on pourra se servir pour simplifier l'expression de φ_3 :

- 1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;
- 2° Changement de la variable x_3 ;
- 3° Échange de λ_1, μ_1, x_1 et de λ_2, μ_2, x_2 ;
- 4° Changement de $\lambda_1, \mu_2, x_1, \mu_3$ en $\lambda_1 + t\lambda_2, \mu_2 - t\mu_1, x_1 + tx_2, \mu_3 - 2t\mu_2 + t^2\mu_1$;
- 5° Changement de $\mu_i, x_i, \lambda_1, \lambda_2$ en $t_i\mu_i, u_ix_i, \frac{\lambda_1}{t_1u_1}, \frac{\lambda_2}{t_2u_1}$, les facteurs t_i, u_i étant liés par les relations

$$t_1u_1 = t_2u_2, \quad t_2u_1 = t_3u_2.$$

Les opérations 3 et 4, combinées entre elles, permettent d'effectuer sur λ_1, λ_2 une substitution linéaire quelconque (à condition d'en détruire l'effet par des substitutions correspondantes effectuées sur les variables μ et x). Cela revient à déplacer à volonté sur la droite λ_3 les sommets $(\lambda_1\lambda_3)$ et $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence. Au lieu d'exécuter sur φ_3 ces substitutions assez complexes, il sera préférable de se donner *a priori* autant que possible la position de ces deux sommets, et de voir, d'après leur situation relativement à la cubique Δ , les conditions qui en résultent pour la fonction

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}\mu_i x_k.$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{32}\lambda_3 + \lambda_2 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(a_{33}\lambda_1^2 + a_{23}\lambda_1\lambda_2 + a_{13}\lambda_2^2 + \dots).$$

Le facteur entre parenthèses représente une conique qui peut être décomposable, mais n'est pas identiquement nulle, et ne contient pas λ_3 en facteur; car, x_3 devant figurer dans φ_3 , a_{13}, a_{23}, a_{33} ne sont pas tous nuls.

Cette conique rencontre λ_3 en deux points : s'ils sont séparés, on les choisira comme sommets du triangle de référence; on aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{33} = 0$, et l'on pourra supposer $a_{23} = 1$.

S'ils se réunissent en un seul, on le prendra pour le sommet $(\lambda_1 \lambda_3)$, laissant l'autre sommet indéterminé provisoirement. On aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$.

Discutons successivement ces deux hypothèses.

79. Première hypothèse : $a_{13} = a_{33} = 0$, $a_{23} = 1$. — Par le changement de x_3 , on rendra a_{22} et a_{21} respectivement égaux à a_{11} , a_{32} ; puis, par le changement de φ_3 , on fera disparaître ces quatre coefficients. Enfin, par l'opération 5, on rendra a_{31} , a_{12} égaux à 0 ou à 1.

Pour $a_{31} = a_{12} = 1$, on aura le type

$$(XXXV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) \\ \quad + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1). \end{array} \right.$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2)$$

représentera une droite et une conique qui se coupent.

Pour $a_{31} = 0$, $a_{12} = 1$, on aura le réseau

$$(XXXVI) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes, d'espèces (I), (H), (F) respectivement.

Le cas où $a_{31} = 1$, $a_{12} = 0$ se ramène au précédent par l'opération 3.

Enfin, pour $a_{31} = a_{12} = 0$, on aura le type

$$(XXXVII) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 \mu_2 x_3,$$

où

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

représente trois droites non concourantes et d'espèces (G), (G), (F).

80. Deuxième hypothèse : $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$. — Par le changement de x_3 , on annulera a_{31} et l'on rendra a_{32} égal à a_{21} ; puis, par le changement de φ_3 , on fera disparaître a_{11} , a_{21} , a_{32} .

Si maintenant a_{22} n'est pas nul, on fera disparaître a_{12} par l'opération 4; enfin, on rendra a_{22} égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura ainsi le réseau

$$(XXXVIII) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2(\mu_2x_1 + \mu_3x_2) \\ \qquad \qquad \qquad + \lambda_3(\mu_2x_2 + \mu_3x_3), \end{cases}$$

où

$$\Delta = \lambda_3\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (F), (H), (I) respectivement.

Si $a_{22} = 0$, mais $a_{12} \geq 0$, on pourra le rendre égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura

$$(XXXIX) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2(\mu_2x_1 + \mu_3x_2) \\ \qquad \qquad \qquad + \lambda_3(\mu_1x_2 + \mu_3x_3). \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

Enfin, si $a_{21} = a_{22} = 0$, on aura le type

$$(XL) \quad \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2(\mu_2x_1 + \mu_3x_2) + \lambda_3\mu_3x_3.$$

$$\Delta = \lambda_1^2\lambda_3.$$

La droite double λ_1 est d'espèce (G); λ_3 est d'espèce (F).

81. NEUVIÈME CAS : Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce (G) ou de l'espèce (H). — Les faisceaux G, H ne diffèrent des faisceaux E, F que par l'échange des deux systèmes de variables μ et x . Les types cherchés se déduisent donc immédiatement des types XXVI à XL par cette même opération.

On doit toutefois rejeter, parmi les nouveaux types obtenus, tous ceux où Δ contiendrait un facteur linéaire de l'une des espèces (E), (F) plus simples que (G) et (H). Ce sont ceux que l'on pourrait déduire de ceux des types XXVI à XL où Δ contient un facteur de l'une des espèces (G), (H).

Il ne restera ainsi que quatre types nouveaux, déduits respectivement des types XXXI, XXIX, XXXV, XXXIX. Ce sont les suivants :

$$(XLI) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) + \lambda_3 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_4 x_3),$$

$$(XLII) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) + \lambda_3 (\mu_3 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(XLIII) \quad \begin{cases} \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \\ + \lambda_3 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_4 x_3), \end{cases}$$

$$(XLIV) \quad \begin{cases} \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \\ + \lambda_3 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3). \end{cases}$$

La cubique Δ s'y décompose en une droite λ_3 et une conique.

La droite λ_3 est de l'espèce (G) dans les types XLI et XLII; de l'espèce (H) dans les deux autres.

Elle coupe la conique en deux points distincts dans les types XLI et XLIII; elle la touche dans les deux autres.

82. DIXIÈME CAS : Δ est décomposable; mais tous ses facteurs linéaires sont de l'espèce (I). — Soit λ_3 l'un de ces facteurs; son faisceau sera réductible à la forme

$$F = \lambda_1 (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3).$$

Mais la discussion sera plus claire si, en changeant x_1, x_2, x_3 en $-x_3, x_1, x_2$, nous lui donnons la forme équivalente

$$F = \lambda_1 (\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2 (\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3).$$

Cette expression reste inaltérée :

1° Si l'on opère une même substitution linéaire sur les deux systèmes de variables μ_1, μ_2 et x_1, x_2 , et sur λ_1, λ_2 la substitution inverse de celle-là;

2° Si l'on change μ_1, μ_2, x_1, x_2 en $\mu_1 + t\mu_3, \mu_2 + u\mu_3, x_1 + tx_3, x_2 + ux_3$.

Cela posé, considérons la fonction φ_3 . Elle peut se mettre sous la forme

$$\varphi_3 = s + \mathfrak{A}_3,$$

s étant symétrique et \mathfrak{A} alternée par rapport aux deux systèmes de variables μ et x .

s sera la polaire par rapport aux μ d'une forme Q quadratique en x_1, x_2, x_3 .

Les substitutions 1 et 2 permettent, comme l'on sait, de réduire $2Q$ à l'une des huit expressions suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 2x_1x_2 + x_3^2, & 2x_1x_2, & x_2^2 + 2x_1x_3, & x_2^2 + x_3^2, \\ x_2^2, & 2x_2x_3, & x_3^2, & 0; \end{array}$$

dont les polaires, divisées par 2, seront les expressions réduites de s .

Quant à \mathfrak{A} , elle sera de la forme

$$a(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + b(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + c(\mu_3x_2 - \mu_2x_3)$$

et le changement de φ_3 en $\varphi_3 - b\varphi_1 - c\varphi_2$ la réduira à son premier terme

$$a(\mu_1x_2 - \mu_2x_1).$$

Soient respectivement s' , \mathfrak{A}' l'ensemble des termes de s et de \mathfrak{A} qui contiennent les produits de μ_1, μ_2 par x_1, x_2 ; si le déterminant de s' n'est pas nul, a^2 représentera le rapport des déterminants de \mathfrak{A}' et de s' . C'est donc un invariant du réseau. On pourra seulement changer le signe de a en permutant les indices 1 et 2.

Dans tous les autres cas, en multipliant les variables λ, μ, x par des facteurs de proportionnalité convenables, on pourra réduire a à l'unité, s'il n'est pas nul. Si, par exemple,

$$2Q = x_2^2 + 2x_1x_3,$$

d'où

$$s = \mu_2x_2 + \mu_1x_3 + \mu_3x_1;$$

il suffira de changer $\mu_2, \mu_3, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en $a\mu_2, a^2\mu_3, ax_2, a^2x_3, \frac{\lambda_1}{a^2}, \frac{\lambda_2}{a^2}, \frac{\lambda_3}{a^2}$. Si $2Q$ ne contient pas x_1 on changera μ_1, x_1, λ_1 en $\frac{\mu_1}{a}, \frac{x_1}{a}, a\lambda_1$.

85. Discutons les solutions trouvées ci-dessus :

Soit $2Q = 2x_1x_2 + x_3^2$: on obtiendra le type

$$(XLV) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) \\ + \lambda_3[(1+a)\mu_1x_2 + (1-a)\mu_2x_1 + \mu_3x_3]. \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3[(a^2 - 1) - 2\lambda_1\lambda_2]$$

se composera en général d'une droite λ_3 , d'espèce (I) et d'une conique qui la coupe.

Si $a = \pm 1$ (ces deux cas se ramènent l'un à l'autre), Δ dégénère dans le produit de trois droites non concourantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. La droite λ_3 est d'espèce (I), les deux autres d'espèces (F) et (H). Le réseau (XLV) doit donc, pour cette valeur de a^2 , pouvoir se transformer dans le réseau (XXXVI) qui est le seul, parmi ceux précédemment trouvés, où Δ se décompose en trois droites non concourantes des espèces précitées.

Effectivement, soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau XLV deviendra

$$\lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) + \lambda_3(2\mu_1x_2 + \mu_3x_3),$$

expression qui se transforme en XXXVI, si l'on change

$$\begin{array}{cccccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & x_1, & x_2, & x_3 \\ \text{en} & & & & & & & & \\ -\lambda_3, & 2\lambda_2, & \lambda_1, & \mu_1, & -\frac{1}{2}\mu_3, & \mu_2, & -x_3, & \frac{1}{2}x_1, & x_2. \end{array}$$

Il faudra donc, pour éviter un double emploi, soit introduire la condition $a^2 \geq 1$ dans la définition du type XLV, soit supprimer cette condition, mais en rayant du Tableau le type XXXVI, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLV.

84. Soit $2Q = 2x_1x_2$. On aura le réseau

$$(XLVI) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) \\ + \lambda_3[(1+a)\mu_1x_2 + (1-a)\mu_2x_1]. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (1-a)\lambda_3 & \lambda_1 \\ (1+a)\lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes. Leurs faisceaux dépendant en général de toutes les variables seront de l'espèce (I).

Il y aura toutefois dégénérescence si $a^2 = 1$. Soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3 \cdot 2\mu_1 x_2.$$

Le faisceau de λ_1 , ne dépendant que des cinq variables $\mu_1, \mu_2, \mu_3, x_2, x_3$, et contenant une forme monome $2\mu_1 x_2$, sera de l'espèce (E).

Celui de λ_2 , ne dépendant que de $\mu_1, \mu_3, x_1, x_2, x_3$ et contenant cette même forme monome, sera de l'espèce (G). Celui de λ_3 sera toujours de l'espèce (I).

Le réseau particulier que nous considérons doit donc être équivalent au type XXVIII qui, seul parmi les précédents, jouit des propriétés ci-dessus. Effectivement, si nous remplaçons

$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & x_1, & x_2, & x_3 \\ \text{par} & & & & & & & & \\ \lambda_3, & \lambda_2, & \frac{1}{2}\lambda_1, & \mu_1, & \mu_3, & \mu_2, & x_3, & x_1, & -x_2 \end{array}$$

l'expression précédente se transforme dans l'expression XXVIII.

Il faudra donc introduire encore la condition $a^2 \geq 1$ dans la définition du type XLVI, ou, si l'on veut supprimer cette restriction, rayer du Tableau le type XXVIII, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLVI.

83. Revenons au cas général, où $a^2 \geq 1$. La cubique Δ se décomposant en trois droites de même espèce, on pourra choisir arbitrairement parmi elles celle que l'on prendra pour λ_3 .

Dans quelle mesure la valeur de l'invariant dépend-elle de ce choix ?

1° Nous avons vu que l'expression XLVI ne change pas si l'on permute les indices 1 et 2, en changeant le signe de a . Cet invariant ne fait donc que changer de signe si l'on permute les droites λ_1, λ_2 .

2° Permutons maintenant λ_2 et λ_3 . Le réseau deviendra

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2[(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1] \\ + \lambda_3(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3). \end{aligned}$$

Changeons

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \lambda_3$$

en

$$\mu_3, \frac{\mu_2}{a-1}, -\mu_4, x_3, \frac{x_2}{a+1}, -x_4, (a^2-1)\lambda_3.$$

Cette expression sera changée en

$$\begin{aligned} & \lambda_1(\mu_3x_4 - \mu_4x_3) + \lambda_2(\mu_4x_2 - \mu_2x_3) \\ & + \lambda_3[(1-a)\mu_4x_2 + (1+a)\mu_2x_4] \end{aligned}$$

et l'on voit que l'invariant, ici encore, a simplement changé de signe.

86. Soit

$$2Q = x_2^2 + 2x_1x_3;$$

on aura

$$\varphi_3 = \mu_2x_2 + \mu_1x_3 + \mu_3x_4 + a(\mu_1x_2 - \mu_2x_4),$$

a étant égal à 1 ou à 0.

L'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée, car la droite $\lambda_1 - \lambda_3$, ayant pour faisceau

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_1(\varphi_1 + \varphi_3) = \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) + \lambda_1(\mu_2x_2 + 2\mu_3x_4)$$

qui ne contient pas la variable μ_4 , serait un facteur de Δ , d'espèce plus simple que (1).

Posons donc $a = 1$; nous aurons le type

$$(XLVII) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3x_4 - \mu_4x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) \\ + \lambda_3[\mu_4(x_2 + x_3) + \mu_2(x_2 - x_4) + \mu_3x_4]. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_4^2 - \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

87. Dans les cas qui nous restent à examiner, Q ne contient plus la variable x_4 , et a doit être supposé égal à 0 ou à 1. Mais l'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée.

En effet, les variables μ_4, x_4 ne figureraient pas dans la fonction φ_3 , non plus que dans la fonction $\varphi_2 = \mu_3x_2 - \mu_2x_3$. Le faisceau de la

droite λ_1 contenant au plus quatre variables, cette droite serait un facteur de Δ , d'espèce plus simple que (I).

88. Soit $2Q = x_2^2 + x_3^2$, et $a = 1$. Nous aurons le type

$$(XLVIII) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)$$

représente trois droites concourantes. Toutes trois sont de l'espèce (I).

89. Soit $2Q = x_2^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$(XLIX) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1^2$$

se décompose en une droite double et une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

90. Soit $2Q = x_2 x_3$, $a = 1$. Nous aurons le réseau

$$\begin{aligned} & \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ & + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2 + \mu_2 x_1 - \mu_1 x_2). \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_3 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \lambda_3^2$$

est encore le produit d'une droite double par une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

Mais un réseau de ce genre est susceptible de deux formes réduites distinctes suivant qu'on prend pour λ_3 la droite simple, comme au numéro précédent, ou la droite double, comme ici. Une de ces expressions doit être rejetée, si l'on veut éviter un double emploi. Nous pouvons donc laisser de côté ce dernier type.

91. Soit $2Q = x_3^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$(L) \quad \lambda_1(\mu_3x_4 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) + \lambda_3(\mu_3x_3 + \mu_1x_2 - \mu_2x_1),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^3$$

représentera une droite triple.

92. Soit enfin $Q = 0$, $a = 1$. On obtiendra un dernier type

$$(LI) \quad \lambda_1(\mu_3x_4 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) + \lambda_3(\mu_1x_2 - \mu_2x_1),$$

qui, par le changement de λ_1, λ_2 en $\lambda_2, -\lambda_1$, pourra s'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & x_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & x_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

Δ sera identiquement nul et contiendra toutes les droites du plan. Mais elles seront toutes de l'espèce (I). Car, si l'une d'elles était d'une espèce plus simple, le réseau actuel devrait être équivalent à l'un des types précédemment trouvés pour lesquels Δ est nul. Ce sont les types XVIII et XXV.

Mais le réseau XVIII contient deux formes monomes, le réseau XXV une seule, le réseau LI aucune. Ces trois types sont donc nettement distincts.

93. Nous donnons ci-après comme résumé le Tableau des 51 types que nous avons formés et des caractères invariants qui les distinguent.

La colonne intitulée : *Facteurs de Δ* demande quelques explications. Le symbole Δ représente une cubique indécomposable; Q désigne une conique indécomposable; A, B, \dots, I des facteurs linéaires correspondant à des droites d'espèce A, B, \dots, I .

Ainsi A^2G , mis dans cette colonne, signifie que Δ se décompose en une droite double d'espèce A et une droite simple d'espèce G ; III que Δ est formé de trois droites distinctes d'espèce I ; etc.

NUMÉROS des types	FORMES GÉNÉRALISÉES			FACTEURS de Δ	PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs,	NOMBRE des formes monômes
	$\tilde{\sigma}_1$	$\tilde{\sigma}_2$	$\tilde{\sigma}_3$			
I.	$y_1x_1 - y_2x_2$	$y_1x_2 - y_2x_1$	$y_1(x_2 + \rho x_1) + y_2(\rho x_1 + x_2)$ $+ y_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3), (\rho - \rho\sigma - \sigma^2 = 0)$	Δ	Cubique générale (un point double si $y_3(\rho^2 - \rho\sigma + 1) + \sigma^2 = 0$)	6 en général si $\rho^2 = 1, \sigma = 0$
II.	$y_1x_2 - y_2x_1$	$y_1x_3 - y_2x_2$	$y_1(x_2 + x_3) + y_2(x_1 + x_3) + y_3(-x_1 + x_2)$	Δ	Cubique à rebroussement	0
III.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2(x_2 + x_3) + y_3x_1$	Δ	Id.	0
IV.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2(x_2 + x_3) + y_3(x_1 + x_2)$	Δ	Id.	1
V.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	Δ	Id.	1
VI.	y_1x_1	y_2x_1	$y_1x_2 + y_2x_3$	$\Delta^2 G$		∞
VII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	A^3		∞
VIII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	$B^2 E$		∞
IX.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	B^3		∞
X.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	CQ		1
XI.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	CQ		2
XII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	CCG		3
XIII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3(x_1 + x_2)$	$C^2 I$		2
XIV.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2(x_1 + x_2)$	$C^2 G$		2
XV.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	$C^2 D$		2
XVI.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2$	$C^2 E$		2
XVII.	y_1x_1	y_2x_1	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	C^3		2
XVIII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	$\Delta = 0$	Tangentes, Concourantes.	2
XIX.	$y_1x_1 + y_2x_2$	y_2x_1	$y_1x_1 + y_2x_2$	DQ		1
XX.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2$	DEG		1
XXI.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2$	D^2 I		1
XXII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2$	D^2 E		1
XXIII.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2$	D^2 G		1
XXIV.	Id.	Id.	$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1$	D^3		1

(*) Observations. — Si $\rho^2 - \rho\sigma + 1$ était nul, ce resson serait équivalent à XVI (ou à XVIII si l'on avait aussi $\sigma = 0$).

(*) Δ est une cubique à un point double pour le type II; elle se décompose en une droite et une conique pour le type IV; en trois droites pour les types III et V.

NUMÉROS des types.	FORMES GÉNÉRATRICES			FACTEURS de Δ .	PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs.	NOMBRE des formes autonomes
	φ_1	φ_2	φ_3			
XX	$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$	$\varphi_2 x_1$	$\varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3$	$\Delta = 0$		1
XXI	Id.	$\varphi_1 x_1 + \varphi_3 x_3$	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3 + \varphi_3 x_1$	EQ		1
XXII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	EHI		1
XXIII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$	EGI		1
XXIV	Id.	Id.	$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3$	EQ	Tangentes Concourantes.	1
XXV	Id.	Id.	$\varphi_1 (x_2 + x_3) + \varphi_2 x_1$	EEG		1
XXVI	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3 + \varphi_3 x_1$	EGG		1
XXVII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	EG ²		1
XXVIII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$	E ² H		1
XXIX	Id.	Id.	$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$	E ² G		1
XXX	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	EQ		1
XXXI	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3 + \varphi_3 x_1$	FHI		0
XXXII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	FGG		1
XXXIII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	FHI	Concourantes. Tangentes.	0
XXXIV	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	FQ		0
XXXV	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	FG ²		1
XXXVI	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	GQ	Tangentes.	1
XXXVII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	GQ		1
XXXVIII	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	HQ		0
XXXIX	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	IIQ	Tangentes.	0
XL	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_3$	IQ		0
XL I	Id.	Id.	$(1+a)\varphi_1 x_2 + (1-a)\varphi_2 x_1$	III		0
XL II	Id.	Id.	$\varphi_1 (x_2 + x_3) + \varphi_2 (x_2 - x_1) + \varphi_3 x_1$	IQ	Tangentes. Concourantes.	0
XL III	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 (x_2 - x_1) + \varphi_3 x_1$	III		0
XL IV	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 (x_2 - x_1)$	PI		0
XL V	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_2$	P		0
XL VI	Id.	Id.	$\varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_1$	$\Delta = 0$		0

Observations. — Pour $a^2 = 1$, le type XLV serait équivalent à XXXVI et le type XLVI à XXXVII.

Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Introduction.

Une quantité ou grandeur hypercomplexe x , appartenant à un groupe (ε) d'ordre n , est, comme on sait, une expression

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} x_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, n).$$

Les x_{β} sont des nombres ordinaires, réels ou complexes. Les ε_{β} sont des symboles, choisis de façon que le produit de deux quantités quelconques prises dans le groupe (ε) appartienne encore au même groupe.

La théorie des quantités hypercomplexes est aujourd'hui bien connue, grâce aux recherches de Gauss, puis de MM. Poincaré, Dedekind, Study, etc., enfin, plus récemment, de MM. Molien, Cartan, Frobenius.

Ce dernier auteur, dans son Mémoire : *Theorie der hypercomplexen Größen* (*Sitzungsberichte der Académie de Berlin*, pour avril 1903) a adopté une méthode d'exposition, fondée sur la pure Algèbre, sans aucune intervention des groupes de Lie. Je suivrai la même méthode, me conformant à la terminologie et aux notations de M. Frobenius.

Prenons n fonctions $X_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ des n variables x_β ,

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

La quantité hypercomplexe

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha}$$

sera par définition une fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} x_{\beta}.$$

J'écrirai, avec M. Frobenius, $X = f((x))$, réservant la notation $f(x)$ aux fonctions des variables x_{β} .

Existe-t-il pour X quelque chose qui ressemble à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus*, mai 1903) s'est posé la question. Il a reconnu que la monogénéité ne pouvait, dans ses traits principaux, être étendue qu'aux groupes (ε) à multiplication commutative.

Dans le présent travail je m'occupe des r^2 -ions (quaternions, pour $r = 2, \dots$), c'est-à-dire du cas où (ε) est un groupe simple, par conséquent à multiplication non commutative, avec $n = r^2$.

J'ai cherché ce que devenait la monogénéité.

Pour les quantités complexes ordinaires, la monogénéité, comme on sait, consiste en ceci : la différentielle dX de la fonction est égale au produit $u dx$ de la différentielle dx de la variable par la quantité complexe u .

Pour les r^2 -ions, la multiplication n'est plus commutative. L'expression $u dx$ est à remplacer par l'expression $u dx v$. Ces expressions $u dx v$ ne se réduisent pas ensemble, au moins en général. Le problème se formule donc ainsi : mettre dX sous la forme

$$dX = \sum_i u_i dx v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

La décomposition est possible de plusieurs façons, mais le minimum des nombres N sera la *catégorie* N ou *indice de monogénéité*.

J'ai construit une matrice n — aire $W(x)$, dont les n^2 éléments sont de la forme

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}},$$

où les constantes $c_{\alpha\beta}$ dépendent seulement du groupe (ε) et sont les mêmes pour toutes les fonctions $f((x))$. *Le rang de cette matrice $W(x)$ est la catégorie.* Les u_i et v_i se déduisent de $W(x)$.

Vis-à-vis du changement de symboles ε , N se comporte comme un invariant. Plus généralement sont covariants les *Elementarteiler* de *Weierstrass* pour le faisceau de matrices n — aire

$$\rho W(x) + W'(x) \quad \rho = \text{param. variable.}$$

Comment se comporte $W(x)$ vis-à-vis du changement de la variable hypercomplexe?

Soit d'abord $X = f((y))$. Posons

$$x_{\beta} = \varphi_{\beta}(y_1, \dots, y_n), \quad y = \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} y_{\gamma} \quad (\gamma = 1, 2, \dots, n);$$

on aura

$$x = \varphi((y))$$

et, par suite,

$$X = F((y)).$$

Nommons \mathfrak{v} et \mathfrak{w} respectivement les matrices W afférentes à $f((x))$ et à $\varphi((y))$, \mathfrak{w} celle afférente à $F((y))$.

Il existe un groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ d'ordre n^2 , simple comme (ε) , connu sans ambigüité dès que (ε) est donné. Si les n^2 éléments des matrices \mathfrak{v} , \mathfrak{w} , \mathfrak{w} sont les coordonnées des quantités hypercomplexes U , V , W dans $(\varepsilon\varepsilon)$ [comme les x_{β} sont les coordonnées de x dans (ε)], alors *W est le produit UV dans $(\varepsilon\varepsilon)$ des deux quantités U et V .*

Le nombre N peut donc être pris comme un élément de classification pour les fonctions

$$f((x)).$$

N ne peut dépasser n . Pour $N = 0$, X est une constante. Enfin j'ai

construit toutes les fonctions $X = f((x))$, où l'indice N de monogénéité est *un*.

Les résultats de cette construction sont plus simples quand on fait usage, dans (ε) , de coordonnées $x_{\alpha\beta}$ et de symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$ à double indice

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r; \quad n = r^2).$$

Alors, comme on sait, à trois quantités x, y, z de (ε) correspondent les trois matrices $r = \text{aires}$:

$$(x) = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1r} \\ \dots \dots \dots \\ x_{r1} \dots x_{rr} \end{pmatrix}; \quad (y) = \dots; \quad (z) = \dots;$$

si $x = yz$, on a aussi

$$(x) = (y)(z).$$

Voici alors l'énumération des types auxquels peut être ramenée une fonction $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r)$, $X = f((x))$, ou

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x_{11}, \dots, x_{rr}),$$

de catégorie un.

Type I.

$X = KxL + M$, où K, L, M sont trois constantes hypercomplexes de (ε) .

Type II.

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1}(t_{\alpha}),$$

$$t_{\alpha} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} t_{\beta 1}, \quad K_{\alpha\beta} = \text{const.},$$

la fonction $X_{\alpha 1}(t)$ d'une variable t est arbitraire.

Type III.

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{i\delta} X_{i\delta}(x_{11}, \dots, x_{1r}),$$

$X_{i\delta} = \text{fonction arbitraire.}$

Type IV.

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(\omega); \quad X_{\alpha\delta}(t) = \int \eta_{\alpha}(t) p_{\delta}(t) dt,$$

$$\omega = \psi(q_1, q_2, \dots, q_r)$$

$$q_{\gamma} = \sum_{\beta} h_{\beta} x_{\beta\gamma} \quad (h_{\beta} = \text{const.}),$$

$$\eta_{\alpha}(t), \quad p_{\delta}(t), \quad \psi = \text{fonctions arbitraires,}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r.$$

Un résumé des présentes recherches a paru aux *Comptes rendus* du 28 mai 1906. Une application des présentes théories a paru au *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1906, sous le titre : *Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes*.

PRÉLIMINAIRES.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. On fera, dans le présent Travail, un usage continu des *matrices* n — aires

$$u = [u_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{\alpha 1} & u_{\alpha\beta} & u_{\alpha n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix};$$

le premier indice de l'élément $u_{\alpha\beta}$ indique la ligne, le second indique la colonne. On écrira aussi, $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$,

$$u_{\alpha\beta} = |u|_{\alpha\beta}.$$

Notamment, dans le produit uv des deux matrices n — aires $[u_{\alpha\beta}]$ et

$[v_{\beta\gamma}]$, on a

$$[uv]_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, n).$$

D'ailleurs, suivant l'usage, u a pour transposée $u' = [u_{\beta\alpha}]$. Je suppose aussi connue du lecteur la théorie des *Elementarteiler* de Weierstrass.

2. Si l'on a n fonctions X_α des n variables x_β , la matrice n — aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \quad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

sera la jacobienne des X par rapport aux variables x . On écrira

$$J = J \left(\begin{matrix} X \\ x \end{matrix} \right) = J \left(\begin{matrix} X_1 \dots X_n \\ x_1 \dots x_n \end{matrix} \right); \quad |J| = \frac{\partial(X_1 \dots X_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}.$$

3. Dans la théorie des quantités hypercomplexes, je me conformerai rigoureusement à la terminologie de M. Frobenius dans sa *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte der Akademie de Berlin*, avril 1903), ainsi qu'aux notations de cet éminent géomètre.

Renvoyant au travail précité pour toutes explications générales et toutes démonstrations, je résume rapidement les résultats dont je me servirai le plus fréquemment dans la suite. Le renvoi (Fr., § 17), par exemple, indiquera le 17^e paragraphe du Mémoire de M. Frobenius.

4. Prenons un groupe (ε) de quantités hypercomplexes. (ε) sera d'ordre n et *simple* par hypothèse; par conséquent n sera un carré parfait $n = r^2$. Pour $r = 2$, on a les quaternions.

(ε) comporte n nombres fondamentaux (*Grundzahl*), linéairement indépendants,

$$\varepsilon_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

qui se multiplient, par définition, suivant la règle suivante :

$$(\varepsilon) \quad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha a_{\beta\gamma\alpha} \quad (a_{\alpha\beta\gamma} = \text{const.})$$

Une quantité hypercomplexe est une expression

$$x = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x'_{\alpha},$$

où x_{α} est un nombre ordinaire (ou *scalaire*) réel ou complexe. Les x_{α} sont les n coordonnées de x .

5. Soit $F(\xi, y, z)$ la forme trilinéaire n — aire

$$F(\xi, y, z) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \xi_{\alpha} y_{\beta} z_{\gamma}.$$

Posons

$$r_{\beta\gamma}(\xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_{\beta} \partial z_{\gamma}}, \quad s_{\alpha\gamma}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{\alpha} \partial z_{\gamma}},$$

$$t_{\alpha\beta}(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{\alpha} \partial y_{\beta}}.$$

Introduisons

La matrice du groupe..... $S_y = S(y) = [s_{\alpha\gamma}(y)],$

La matrice parastrophe..... $R_{\xi} = R(\xi) = [r_{\beta\gamma}(\xi)],$

La matrice antistrophe..... $T_z = T(z) = [t_{\alpha\beta}(z)].$

Comme le groupe (ε) est simple, le déterminant

$$\Theta(y) = |S(y)|,$$

forme de degré n par rapport aux y , est la puissance $r^{\text{ième}}$ d'une forme irréductible $\Phi(y)$ de degré r . Les trois déterminants $|S(x)|$, $|T(x)|$ et $|R(x)|$ ne diffèrent que par un facteur constant et ont mêmes *Elementarteiler*.

Il existe une unité principale (*Haupteinheit*)

$$e = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} e'_{\alpha},$$

telle que $S(e) = T(e) = E$, E étant la matrice n — aire unité.

6. Le produit $x = yz$ de deux quantités hypercomplexes se calcule par la règle ordinaire, mais en tenant compte de la formule (5). Il vient

$$(1) \quad x_{\alpha} = \sum_{\beta\gamma} y_{\beta} z_{\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}.$$

La multiplication n'est pas commutative. Pour exprimer qu'elle est associative, on écrit que, pour y et z quelconques, $S(x)$ et $T(y)$ sont échangeables ou que

$$(2) \quad R_{\xi} S_x = T_x R_{\xi} \quad (\xi \text{ quelconque}).$$

On a, d'ailleurs,

$$S(yz) = S(y)S(z), \quad T(yz) = T(z)T(y).$$

7. Prenons les quantités (Fr., § 7)

$$\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\alpha\lambda} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\lambda\alpha} \quad (\alpha, \lambda = 1, 2, \dots, n).$$

La matrice $P = R(\sigma)$ est symétrique avec son déterminant $|P| \neq 0$ [ce qui, joint au non évanouissement identique de $|S(x)|$ fait de (ε) un groupe de Dedekind].

Une quantité invariante x (Fr., § 4) est, par définition, échangeable à toute quantité y de (ε) , $xy = yx$. On a

$$S(x) = T(x).$$

Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple (Fr., § 14), il faut et il suffit que l'unité principale e soit la seule quantité invariante.

8. Un changement de fondamentaux (Fr., § 9) consiste à poser

$$\varepsilon_{\alpha} = \sum_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\beta} c_{\alpha\beta}, \quad |c_{\alpha\beta}| \neq 0 \quad c_{\alpha\beta} = \text{const.}$$

9. A côté des coordonnées *générales* x_{α} , dont on vient de se servir, on peut introduire (Fr., § 11) des coordonnées *spéciales*.

Au lieu d'un indice unique α variant de 1 à n , on prend deux indices α et β variant chacun de 1 à r , $n = r^2$. Il y a alors les n fondamentaux $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants, des fondamentaux précédents) *spéciaux*, tels que

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} = 0 \quad \text{pour } \beta \neq \gamma, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma},$$

forme spéciale de la formule (o). La quantité x a $n = r^2$ coordonnées spéciales $x_{\alpha\beta}$, qui définissent une matrice r — aire

$$(x) = [x_{\alpha\beta}].$$

Si $x = yz$, alors $(x) = (y)(z)$. C'est la forme spéciale de la formule (1).

Soit g une quantité hypercomplexe. Prenons $(g) = [g_{\alpha\beta}]$. Transformons toutes les matrices r — aires, telles que (x) par la r — aire (g) . Cela équivaut à un changement de fondamentaux (8) et, comme on s'assure aisément, *les coordonnées restent spéciales*, pourvu, bien entendu, que le déterminant de (g) soit $\neq 0$.

Les coordonnées spéciales jouent dans les présentes recherches un rôle capital.

CHAPITRE I.

CATÉGORIE OU INDICE DE MONOGÉNÉITÉ.

1. Prenons n variables indépendantes scalaires x_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) et la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha}.$$

L'expression

$$c_0 x c_1 x \dots c_{m-1} x c_m,$$

où le facteur x est répété m fois, sera dite un *monome de degré m* . Les $m+1$ constantes hypercomplexes c_0, \dots, c_m sont les *coefficients* du monome.

Une somme de monomes de degré m est un *polynome homogène* ou *forme* de degré m . Un polynome non homogène est évidemment une somme de formes.

Une forme Λ de degré m est une expression, telle que

$$(1) \quad \Lambda = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \binom{m}{x},$$

où $\Lambda_{\alpha} \binom{m}{x}$ est une forme scalaire de degré m .

Nous verrons dans la suite qu'une expression X donnée (1) peut se décomposer de plusieurs façons en une somme de monômes. Le nombre minimum des monômes, dans les diverses décompositions, se nommera *catégorie* de la forme X .

2. Le premier problème qui nous occupera sera celui-ci :

Trouver la catégorie, d'une expression X , pour le premier degré, $m=1$.

Considérons une somme de \mathfrak{U} monômes :

$$\omega = \sum_i u_i x v_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mathfrak{U}).$$

On a

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} u_{i\lambda}, & v_i &= \sum_{\mu} v_{i\mu} \varepsilon_{\mu}, \\ \omega &= \sum_i \left(\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} u_{i\lambda} \right) \left(\sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} x_{\beta} \right) \left(\sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} v_{i\mu} \right) \\ &= \sum_{i\lambda\mu\beta} u_{i\lambda} v_{i\mu} x_{\beta} \varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\mu}. \end{aligned}$$

Or

$$\varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\mu} = \varepsilon_{\lambda} \sum_{\rho} \varepsilon_{\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\alpha\rho} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \quad (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \dots, n).$$

Enfin

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \sum_{\alpha\beta\gamma\mu\rho} \varepsilon_{\alpha} u_{i\lambda} v_{i\mu} x_{\beta} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \\ &= \sum_{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha} x_{\beta} w_{\gamma\mu} \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu}, \\ w_{\gamma\mu} &= \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}. \end{aligned} \right.$$

Identifions avec le polynôme X du premier degré (1).

$$X = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha} x_{\beta} X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \text{const.}$$

Il viendra

$$(3) \quad X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu}.$$

Si X est donné, les n^2 inconnues $w_{\lambda\mu}$ s'obtiennent par la résolution des n^2 équations linéaires (3).

On démontrera plus loin (3) que ces équations admettent toujours une et une seule solution; autrement dit : on obtient un déterminant n^2 — aire différent de zéro, en rangeant, parmi les expressions, au nombre de n^4 ,

$$(4) \quad \Omega(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu};$$

dans une même ligne, celles où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même; dans une même colonne, celles où la combinaison $\lambda\mu$ est la même.

3. Considérons la matrice n — aire $W = [w_{\lambda\mu}]$, dont le rang est \mathfrak{N} .

THÉORÈME. — *Le rang \mathfrak{N} de W est la catégorie N du polynome X .*

I. W ayant le rang \mathfrak{N} , la théorie des déterminants apprend qu'il existe $2n\mathfrak{N}$ quantités

$$u_{j\lambda}, \quad v_{j\mu} \quad (j = 1, 2, \dots, \mathfrak{N}; \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n),$$

telles que

$$w_{\lambda\mu} = \sum_j u_{j\lambda} v_{j\mu}.$$

Alors les formules (3) et (4) donnent

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} u_{j\lambda} v_{j\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu)$$

et, d'autre part (2),

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\mu}.$$

Alors

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} = \sum_{\lambda\mu} u_{j\lambda} v_{j\mu} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\mu} \\ &= \sum_j u_j v_j, \end{aligned} \right.$$

u_j et v_j étant les quantités hypercomplexes

$$u_j = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} u_{j\lambda}, \quad v_j = \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} v_{j\mu}.$$

Ainsi X se décompose en une somme de \mathfrak{N} monomes. En vertu de la définition de la catégorie (I), on a

$$(6) \quad \mathfrak{N} \geq N.$$

II. La catégorie étant N , X est identique à une somme de N monomes,

$$X = \sum_l u_l v_l \quad (l = 1, 2, \dots, N),$$

$$u_l = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} u_{l\lambda}, \quad v_l = \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} v_{l\mu}.$$

L'identification donne, par le même calcul qu'au n° 2,

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} u_{\lambda} v_{\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Mais les équations de la formule (3) ont une solution unique et

$$w_{\lambda\mu} = \sum_l u_{l\lambda} v_{l\mu} \quad (l = 1, 2, \dots, N).$$

N ne peut être inférieur au rang \mathfrak{N} de W et

$$(7) \quad \mathfrak{N} \leq N.$$

III. La comparaison des formules (6) et (7) donne

$$\mathfrak{N} = N.$$

C. Q. F. D.

Le problème relatif à la décomposition de la forme X en une somme de monomes se ramène ainsi à l'étude de la matrice n — aire W .

4. La matrice n — aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \quad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

est la jacobienne des n expressions X_{α} par rapport aux n variables x_{β} .

On s'assure aisément que

$$a_{\alpha\lambda\rho} = s_{\alpha\rho}(\varepsilon_{\lambda}), \quad a_{\rho\beta\mu} = t_{\rho\beta}(\varepsilon_{\mu})$$

(voir *Preliminaires*, §). Alors on a

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) &= \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\rho} s_{\alpha\rho}(\varepsilon_{\lambda}) t_{\rho\beta}(\varepsilon_{\mu}) \\ &= [S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu})]_{\alpha\beta} \quad (\text{Preliminaires, 1}). \end{aligned}$$

Alors la formule (3) s'écrit

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} [S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu})]_{\alpha\beta} = \left[\sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu}) \right]_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad J = K(W) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

où $K_{\lambda\mu}$ désigne la matrice n — aire

$$S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu}) = T(\varepsilon_{\mu}) S(\varepsilon_{\lambda}).$$

En vertu de ce qui a été dit : *Les deux matrices n — aires J et W se correspondent, par la formule (8), sans ambiguïté.*

Notamment, pour que $W = 0$, il faut et il suffit que $J = 0$.

La règle pour décomposer une forme linéaire X en une somme de monomes est donc la suivante :

La matrice J étant connue, calculer la matrice W par la formule (8); calculer ensuite, ce qui est possible d'une infinité de

façons, les $2n\aleph$ = $2n\aleph$ quantités

$$u_{i\mu}, \quad v_{i\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, \aleph)$$

$$w_{\lambda\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}$$

[\aleph = \aleph étant le rang de W et la catégorie de \aleph]; alors on a

$$\aleph = \sum_i u_i v_i,$$

u_i, v_i étant les quantités hypercomplexes dont les $u_{i\lambda}$ et $v_{i\mu}$ sont les coordonnées.

3. Voyons ce que deviennent les calculs précédents quand on fait usage des coordonnées *spéciales* (voir *Preliminaires*).

On a

$$(9) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r; \quad n = r^2),$$

$$\aleph = \sum_{\alpha\delta} \aleph_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} = \sum_{\gamma\beta\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} x_{\beta\gamma} \frac{\partial \aleph_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}},$$

l'analogie de la formule (1).

Prenons ensuite les $2\aleph$ quantités hypercomplexes ($i = 1, 2, \dots, \aleph$),

$$u_i = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{i\alpha\beta}, \quad v_i = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} v_{i\gamma\delta}.$$

On aura [(*Preliminaires*, 9)], par la multiplication des matrices (u_i), (v_i) et (v_i),

$$\sum_i u_i v_i = \sum_{i\beta\gamma\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} u_{i\alpha\beta} v_{i\gamma\delta} \varepsilon_{\beta\gamma},$$

et, identifiant avec \aleph ,

$$(10) \quad \frac{\partial \aleph_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \sum_i u_{i\alpha\beta} v_{i\gamma\delta} = w_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

formule analogue à (3).

Disposons les $n^2 = r^2$ quantités $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ comme les éléments d'une matrice w — aire W , les combinaisons $\alpha\beta$ d'indices donnant les lignes,

tandis que les combinaisons $\gamma\delta$ donnent les colonnes. On retombe ainsi sur la matrice W de rang N .

On voit sur la formule (10) que les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont connues sans ambiguïté dès qu'on possède les r^i dérivées partielles

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}}.$$

Disposons ces dérivées suivant une matrice n — aire où les $\alpha\delta$ indiqueront les lignes et les $\beta\gamma$ les colonnes. On aura la jacobienne J (4). Les deux matrices J et W se définiront l'une l'autre sans ambiguïté.

La formule (10), analogue à la formule (3), justifie la résolubilité annoncée (2) des équations (3) par rapport aux n^2 inconnues w .

6. On verra, au Chapitre III, pourquoi, dans certains cas, la catégorie se nomme aussi *indice de monogénéité*.

CHAPITRE II.

GRUPPE $(\varepsilon\varepsilon)$ D'ORDRE n^2 .

7. Prenons une matrice n — aire $W = [w_{\lambda\mu}]$ et considérons les n^2 quantités $w_{\lambda\mu}$ comme les n^2 coordonnées d'une grandeur hyper-complexe w dans un groupe $(\varepsilon\varepsilon)$. La grandeur w et la matrice n — aire

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \quad (4)$$

se définissent l'une l'autre sans ambiguïté.

La multiplication dans le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ sera donnée par la règle suivante :

Si, dans $(\varepsilon\varepsilon)$, $w = uv$, on a

$$K(w) = K(u)K(v).$$

Il est utile pour la suite de construire et de discuter le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$.

Il est évident que les matrices n — aires $K(w)$ fournissent une représentation ou *Darstellung* du groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, lequel a l'ordre n^2 (Frobenius, § 16).

8. On a (4) :

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma'', \lambda, \lambda', \mu, \mu' = 1, 2, \dots, n), \\
 K_{\lambda\mu} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_\lambda), \\
 K_{\lambda\mu} K_{\lambda'\mu'} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_{\mu'}) \\
 = S(\varepsilon_\lambda) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_\mu) T(\varepsilon_{\mu'}) = S(\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'}) \\
 = S\left(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'}\right) T\left(\sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu}\right) \\
 = \left[\sum_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'} S(\varepsilon_\alpha)\right] \left[\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu} T(\varepsilon_{\alpha'})\right] \\
 = \sum_{\alpha\alpha'} a_{\alpha\lambda\lambda'} a_{\alpha'\mu'\mu} K_{\alpha\alpha'}
 \end{aligned}$$

(voir *Preliminaires*).

D'où la formule, changeant un peu les notations,

$$(11) \quad K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} = \sum_{\alpha\alpha'} K_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}.$$

Il vient alors, si $w = uv$ dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
 K(w) = K(u) K(v) &= \left(\sum_{\beta'\beta''} u_{\beta'\beta''} K_{\beta'\beta''}\right) \left(\sum_{\gamma'\gamma''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\gamma'\gamma''}\right) \\
 &= \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} \\
 &= \sum_{\alpha\alpha''} K_{\alpha'\alpha''} \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''}.
 \end{aligned}$$

La formule de multiplication dans $(\varepsilon\varepsilon)$ est ainsi

$$(12) \quad w_{\alpha\alpha''} = \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}.$$

9. Il est facile d'avoir des formules calquées sur celles du groupe (ε) , rappelées dans les *Preliminaires*.

Prenons trois indices g, h, k variant de 1 à n^2 et faisons corres-

pondre g à $\alpha'\alpha''$, h à $\beta'\beta''$, k à $\gamma'\gamma''$. On écrira

$$(13) \quad \begin{cases} \omega_g = \sum_{hk} u_h v_k \Lambda_{ghk}, \\ \Lambda_{ghk} = a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}. \end{cases}$$

Le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ comportera n^2 fondamentaux ε_g ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$, dont la multiplication sera donnée par la formule (14), tirée de la formule (11),

$$(14) \quad \varepsilon_h \varepsilon_k = \sum_g \varepsilon_g \Lambda_{ghk}.$$

On désignera, pour le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, par les lettres

$$\mathcal{F}, \quad \mathcal{R}, \quad \mathcal{S}, \quad \mathcal{T}, \quad \mathcal{P},$$

ce qui, pour le groupe (ε) , a été désigné aux *Preliminaires* par les lettres

$$F, \quad R, \quad S, \quad T, \quad P.$$

On aura exactement les mêmes formules, sauf que les lettres a, α, β, γ sont remplacées par les lettres A, g, h, k .

Ainsi, pour la forme trilinéaire,

$$\mathcal{F}(\zeta, u, v) = \sum_{ghk} \Lambda_{ghk} \zeta_g u_h v_k;$$

pour la matrice parastrophe $\mathcal{R}(\zeta)$,

$$\mathcal{R}_{hk}(\zeta) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u_h \partial v_k};$$

pour la matrice du groupe $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$\mathcal{S}_{gh}(u) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \zeta_g \partial v_h};$$

pour la matrice antistrophe,

$$\mathcal{P}_{gh}(v) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \zeta_g \partial u_h},$$

10. Montrons brièvement que les propriétés du groupe (ε) se conservent pour $(\varepsilon\varepsilon)$.

1. Aucun des trois déterminants $n^2 - \text{aires}$

$$|\mathfrak{A}(\xi)|, \quad |s(u)|, \quad |\mathfrak{E}(v)|$$

ne s'évanouit identiquement.

Soit, par exemple, le déterminant parastrophe $|\mathfrak{A}(\xi)|$. Montrons que ce déterminant ne s'évanouit pas pour ξ convenablement choisi. Prenons

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha'\alpha''} &= c_{\alpha'} d_{\alpha''}, \\ \mathfrak{A}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(\xi) &= \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} c_{\alpha'} d_{\alpha''} \\ &= \left(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'} c_{\alpha'} \right) \left(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''} d_{\alpha''} \right) \\ &= r_{\beta'\gamma'}(c) r'_{\gamma''\beta''}(d) \quad (\text{Préliminaires, } \mathfrak{B}); \end{aligned}$$

le déterminant parastrophe est

$$|r_{\beta'\gamma'}(c) r'_{\gamma''\beta''}(d)|.$$

Dans ce déterminant $n^2 - \text{aire}$, les lignes correspondent aux combinaisons $\beta'\beta''$, les colonnes aux combinaisons $\gamma'\gamma''$. Donc, en vertu d'un théorème de Kronecker (PASCAL, *Die Determinanten*, p. 107), ce déterminant est

$$|r_{\beta'\gamma'}(c)|^n |r'_{\gamma''\beta''}(d)|^n = |R(c)|^n |R(d)|^n \neq 0,$$

pour c et d quelconques.

Le raisonnement est analogue pour $|s(u)|$ et $|\mathfrak{E}(v)|$.

Un corollaire est que l'on ne peut avoir, *pour v quelconque*, $uv = 0$ sans avoir aussi $u = 0$.

En effet, la formule (13) donnerait

$$0 = \sum_{hk} \Lambda_{g^h k} u_h v_k = \sum_h u_h \sum_k \Lambda_{g^h k} v_k = \sum_h u_h \mathfrak{E}_{g^h}(v)$$

pour $g, h, k = 1, 2, \dots, n^2$.

Comme, pour v quelconque, $|\mathfrak{E}(v)| \neq 0$, $u_h = 0$. c. q. f. d.

II. Dans $(\varepsilon\varepsilon)$ la multiplication est associative, puisqu'elle est fondée sur la multiplication des matrices n — aires (7), laquelle est associative.

III. Les n^2 fondamentaux ε_g ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$ sont linéairement indépendants. Supposons, en effet, pour n^2 constantes $\eta_{\alpha'\alpha''}$ convenablement choisies,

$$\sum_{\alpha'\alpha''} \eta_{\alpha'\alpha''} \varepsilon_{\alpha'\alpha''} = 0.$$

La quantité η , dont les coordonnées sont les $\eta_{\alpha'\alpha''}$, est nulle; donc $\eta\alpha = 0$ pour α quelconque, donc (1 ci-dessus) $0 = \eta = \eta_{\alpha'\alpha''}$.

C. Q. F. D.

IV. Pour le groupe (ε) , les quantités (Frobenius, § 7 et *Preliminaires*, 7) σ_μ et $\sigma_{\mu'}$ qui figurent dans la trace de $|S(x)|$ sont

$$(\lambda, \mu, \mu' = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sigma_\mu = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu}, \quad \sigma_{\mu'} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu'}.$$

La quantité analogue est pour $(\varepsilon\varepsilon)$

$$\nu_h = \sum_g \Lambda_{ghg} \quad (g, h = 1, 2, \dots, n^2),$$

g, h, k correspondant respectivement à $\alpha'\alpha'', \beta'\beta'', \gamma'\gamma''$. D'ailleurs

$$\Lambda_{g'hk} = a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}$$

et $\Lambda_{g'hg}$ s'obtient en faisant $\gamma' = \alpha', \gamma'' = \alpha''$,

$$\nu_h = \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\alpha} a_{\alpha''\alpha'\beta} = \left(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha} \right) \left(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha'\beta} \right).$$

$\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha}$, c'est $\sigma_{\beta'}$. Quant à $\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha'\beta}$, c'est (Frobenius, *loc. cit.*),

$$\tau_{\beta''} = \sigma_{\beta''},$$

$\sum_{\beta''} \tau_{\beta''\alpha'\beta''}$ étant la trace de $|T(\alpha')|$

Bref

$$\nu_h = \nu_{\beta'\beta''} = \sigma_{\beta'} \sigma_{\beta''}.$$

Le groupe (ε) est un groupe de Dedekind (Frobenius, § 7) parce que le déterminant de la matrice symétrique n — aire $P = R(\sigma)$ est $\neq 0$. Formons de même, pour le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, la matrice n^2 — aire $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}(\nu)$, telle que

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} &= \sum_{\alpha'\alpha''} \nu_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} = \sum_{\alpha'\alpha''} \sigma_{\alpha'} \sigma_{\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} \\ &= \left(\sum_{\alpha'} \sigma_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'} \right) \left(\sum_{\alpha''} \sigma_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''} \right) \\ &= r'_{\beta'\gamma'}(\sigma) r'_{\beta''\gamma''}(\sigma) = p_{\beta'\gamma'} p_{\beta''\gamma''} \end{aligned}$$

(*Preliminaires*, 7), où

$$P = [p_{\beta'\gamma'}] = P' = [p_{\gamma'\beta'}].$$

Alors $|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'} p_{\beta''\gamma''}|$ et dans la matrice n^2 — aire \mathfrak{P} les lignes sont indiquées par les indices $\beta'\beta''$ ou h , les colonnes par les indices $\gamma'\gamma''$ ou k . Le théorème de Kronecker, déjà invoqué, donne

$$|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'}|^n |p_{\beta''\gamma''}|^n = |P|^{2n} \neq 0.$$

D'ailleurs \mathfrak{P} est symétrique.

Donc $(\varepsilon\varepsilon)$ est un groupe de Dedekind.

12. V. Cherchons l'unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$, que je nomme ε , de coordonnées $\varepsilon_{j\mu}(\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$. Sa matrice n — aire $K(\varepsilon)$ étant telle que $K(\varepsilon)K(u) = K(u)$ pour u quelconque, on a $K(\varepsilon) = E =$ la n — aire unité. Posons $\varepsilon_{j\mu} = e_j e_{j\mu}$, e étant l'unité principale de (ε) . On a (8)

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) &= \sum_{j\mu} e_j e_{j\mu} K_{j\mu} = \sum_{j\mu} e_j e_{j\mu} S(\varepsilon_j) T(\varepsilon_{j\mu}) \\ &= \left[\sum_j e_j S(\varepsilon_j) \right] \left[\sum_{\mu} e_{j\mu} T(\varepsilon_{j\mu}) \right] = S(e) T(e) = E. \end{aligned}$$

Comme les quantités n_{μ} de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices $K(u)$ se définissent

mutuellement sans ambiguïté; ε , ainsi introduite, est la seule unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$.

15. VI. On a appelé (*Préliminaires*, 7) la définition de la grandeur invariante dans un groupe, ainsi que la proposition suivante :

Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple, il faut et il suffit que la seule grandeur invariante soit l'unité principale.

Ce criterium permettra de voir que $(\varepsilon\varepsilon)$, déjà, en vertu de IV, groupe de Dedekind, est simple.

Soit ν , $\nu \neq \varepsilon$ et $\neq o$, une grandeur invariante de $(\varepsilon\varepsilon)$; on a, par définition, pour u *quelconque* dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$u_\nu = \nu u, \quad K(u)K(\nu) = K(\nu)K(u).$$

Faisons, en particulier, successivement

$$u_{\lambda\mu} = e_j \tau_{j\mu} \quad \text{et} \quad u_{\mu\lambda} = e_\mu \tau_\mu^j;$$

il viendra

$$K(u) = \sum_{\lambda\mu} e_j \tau_{j\mu} S(\varepsilon_j) T(\varepsilon_\mu) = S(e) T(\tau_j) = T(\tau_j),$$

$$K(u) = \sum_{\lambda\mu} e_\mu \tau_\mu^j S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = S(\zeta) T(e) = S(\zeta).$$

$K(\nu)$ est donc échangeable à $T(\tau_j)$ et à $S(\zeta)$. Frobenius (§ I, *in fine*) montre qu'il y a dans (ε) deux grandeurs \varkappa et \mathfrak{F} , telles que

$$K(\nu) = S(\varkappa) = T(\mathfrak{F}).$$

On en déduit (Frobenius, § 14, théorème IV)

$$\varkappa = \mathfrak{F} = e.$$

De là

$$K(\nu) = E.$$

ν est donc l'unité principale forcément, puisque les grandeurs de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices K se définissent mutuellement sans ambiguïté.

G. Q. F. D.

14. Ainsi le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ d'ordre n^2 est simple, tout comme le groupe (ε) d'ordre n .

La forme $|s(w)|$ de degré n^2 , aux n^2 variables $w_{\lambda\mu}$, est, d'après les théories connues,

$$|s(w)| = [\Phi(w)]^n,$$

où Φ est une forme indécomposable de degré n .

Les $n - a$ ires $K(w)$ fournissent une *Darstellung* de $(\varepsilon\varepsilon)$. Si

$$K(w) = \Theta(w),$$

on a

$$\Theta(uv) = \Theta(u)\Theta(v)$$

(Frobenius, dernier paragraphe) et $\Theta(w)$ est une puissance de $\Phi(w)$. Ils sont du même degré n et l'on a, à un facteur constant près, $\Phi = \Theta$.

On a, pour le groupe (ε) d'ordre $n = r^2$,

$$|S(z)| = [\varphi(z)]^r,$$

$\varphi(z)$ = forme de degré r par rapport aux n variables z .

Si l'on pose, en particulier, $w_{\lambda\mu} = r_{\lambda} \zeta_{\mu}$, η et ζ quelconques,

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} r_{\lambda} \zeta_{\mu} T(\varepsilon_{\mu}) S(\varepsilon_{\lambda}) = S(\eta) T(\zeta),$$

$$|K(w)| = \Theta(w) = |S(\eta)| |T(\zeta)| = [\varphi(\eta) \varphi(\zeta)]^r = |s(w)|^{\frac{1}{n}}.$$

15. Reprenons les formules (3) et (4), qu'on écrira

$$(3) \quad |b_{\alpha\beta}| = K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$(4) \quad b_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Les w sont les coordonnées dans $(\varepsilon\varepsilon)$ de la quantité hypercomplexe w . D'autre part, le déterminant des n^2 quantités Ω est $\neq 0$. La formule (4) fournit donc, dans $(\varepsilon\varepsilon)$, un changement de fondamentaux (*Préliminaires*, 8) et de coordonnées.

Dans $(\varepsilon\varepsilon)$, pour $w = uv$, on a

$$K(w) = K(u)K(v).$$

Alors les $b_{\alpha\beta}$ peuvent être considérées comme des coordonnées *spéciales* dans $(\varepsilon\varepsilon)$ (*Préliminaires*, 9) et l'on peut écrire

$$K(w) = (w).$$

On verra plus bas (32) pourquoi nous avons dû étudier le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$.

CHAPITRE III.

MATRICE $W(x)$; SES PROPRIÉTÉS.

16. Soient

$$X_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

n fonctions des n variables scalaires x_1, \dots, x_n . La grandeur hypercomplexe dans le groupe (ε) ,

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha},$$

sera, *par définition*, fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} x_{\beta}.$$

X possède-t-elle quelques propriétés analogues à la monogénéité dans les fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus*, mai 1893) a reconnu que la monogénéité ne pouvait être étendue qu'aux quantités hypercomplexes à multiplication commutative.

Je me propose de voir ce qui se passe pour un groupe (ε) simple, d'ordre $n = r^2$ et, par conséquent, à multiplication non commutative.

17. Prenons deux nombres réels, x_1 et x_2 , la variable complexe

$$x = x_1 + ix_2 \quad (i^2 + 1 = 0)$$

et la fonction

$$y = f(x) = X_1(x_1, x_2) + i X_2(x_1, x_2).$$

La monogénéité consiste en ce que dy est égal au produit de la différentielle dx par une certaine quantité complexe finie

$$dy = f'(x) dx.$$

Avec la terminologie, introduite au Chapitre I, on peut dire : *la monogénéité consiste en ce que la différentielle de la fonction est, vis-à-vis la différentielle de la variable, un monome linéaire.*

Revenons aux fonctions d'une variable hypercomplexe. La différentielle

$$dX = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} dX_{\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha} dx_{\beta} X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

est, par rapport à dx , une *forme* (I) du premier degré.

Elle peut donc être mise (Chap. I) sous forme d'une somme de monomes en dx , c'est-à-dire d'un polynôme linéaire en dx ; la catégorie de ce polynôme, qu'on peut nommer aussi *indice de monogénéité*, sera pour nous l'élément de classification pour les fonctions X . Les fonctions à indice *un* de monogénéité, telles que $dX = u dx$, rappelleront les fonctions monogènes ordinaires.

18. Introduisons, comme au Chapitre I, la matrice n -aire,

$$W = W(x) = [\omega_{\lambda\mu}(x)],$$

telle que (form. 3),

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} \omega_{\lambda\mu}(x) \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu),$$

$$\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \dots, n.$$

Lorsqu'on fait usage des coordonnées spéciales,

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x'_{\beta\gamma}, \quad X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x'),$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r; \quad n = r^2$$

et

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} \quad (\text{form. 10}) :$$

dans la matrice W , l'élément $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ occupe la ligne d'indices $\alpha\beta$ et la colonne d'indices $\gamma\delta$.

Nous allons donc étudier de plus près la matrice W et notamment le rang de W , ainsi que la façon dont W provient de la jacobienne des fonctions X par rapport aux variables x .

19. Reprenons les coordonnées générales et voyons quelles modifications éprouve W , quand on effectue un changement de fondamentaux (Frobenius, § 9).

Rappelons quelques formules du Chapitre I,

$$\begin{aligned} J &= [X_{\alpha\beta}] = \left[\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right] = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu}, \\ \alpha, \beta, \lambda, \mu &= 1, 2, \dots, n, \\ K_{\lambda\mu} &= S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu}), \\ \varepsilon_i \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\mu} &= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\lambda\beta} \varepsilon_{\mu\beta\alpha} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} [K_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant une matrice de constantes

$$B = [b_{\alpha\beta}], \quad |B| = 1, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\partial |B|}{\partial b_{\alpha\beta}}, \quad B^{-1} = [B_{\beta\alpha}],$$

et posons (Frobenius, § 9), pour changer de fondamentaux,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= B[\bar{\varepsilon}], \quad \varepsilon_l = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} b_{l\alpha}, \\ \bar{\varepsilon} &= B^{-1}[\varepsilon], \quad \bar{\varepsilon}_l = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha l}. \end{aligned}$$

Le groupe (ε) se change en le groupe $(\bar{\varepsilon})$. Je désignerai toutes les grandeurs et formations, afférentes à $(\bar{\varepsilon})$, par les mêmes lettres que les grandeurs et formations afférentes à (ε) . Seulement ces lettres seront surmontées d'un petit trait horizontal.

20. On aura

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} \quad \text{et} \quad x = B'^{-1}[\bar{x}], \\ x_{\gamma} &= \sum_{\beta} B_{\gamma\beta} \bar{x}_{\beta}, \quad \bar{x} = B[x], \\ \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{X}_{\alpha}, \\ X &= B'^{-1}[\bar{X}], \quad \bar{X} = B'[X], \\ \bar{X}_{\alpha} &= \sum_{\delta} b_{\delta\alpha} X_{\delta}.\end{aligned}$$

21. Calculons la matrice $\bar{J} = [\bar{X}_{\alpha\beta}]$,

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{X}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \sum_{\delta} b_{\delta\alpha} X_{\delta} \\ &= \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} \frac{\partial X_{\delta}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} = \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} X_{\delta\gamma} B_{\gamma\beta},\end{aligned}$$

sous le bénéfice des formules du n° 20. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\alpha\beta} &= [B'JB'^{-1}]_{\alpha\beta}, \\ \bar{J} &= B'JB'^{-1}.\end{aligned}$$

22. D'autre part (19 et 4), on a

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{\gamma} \bar{\varepsilon}_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\mu} &= \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} [\bar{K}_{\alpha\mu}]_{\alpha\beta} = \left(\sum_{\varepsilon} B_{\varepsilon\lambda} \varepsilon_{\varepsilon} \right) \left(\sum_{h} B_{h\beta} \varepsilon_h \right) \left(\sum_k B_{k\mu} \varepsilon_k \right) \\ &= \sum_{g,h,k} B_{g\lambda} B_{h\beta} B_{k\mu} \varepsilon_g \varepsilon_h \varepsilon_k \\ &= \sum_{g,h,l} B_{g\lambda} B_{h\beta} B_{k\mu} \varepsilon_l [K_{gk}]_{lh} \\ &= \sum_{\alpha,g,h,k,l} \bar{\varepsilon}_{\alpha} B_{g\lambda} B_{h\beta} B_{k\mu} b_{l\alpha} [K_{gk}]_{lh} \\ &(\alpha, \beta, \lambda, \mu, g, h, k, l = 1, 2, \dots, n),\end{aligned}$$

grâce aux formules du n° 19.

Identifiant les coefficients de $\bar{\varepsilon}_\alpha$ dans les deux expressions du produit $\bar{\varepsilon}_\lambda \bar{\varepsilon}_\beta \bar{\varepsilon}_\mu$, on a

$$[\bar{K}_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta} = \sum_{g^k} B_{g^k} B_{k\mu} \sum_{h^l} U_{l\alpha} [K_{g^k}]_{lh} B_{h\beta} = \sum_{g^k} B_{g^k} B_{k\mu} [B' K_{g^k} B'^{-1}]_{\alpha\beta},$$

et, finalement,

$$\bar{K}_{\lambda\mu} = B' \left(\sum_{g^k} B_{g^k} B_{k\mu} K_{g^k} \right) B'^{-1}.$$

23. Ensuite, sous le bénéfice de cette formule et de celle du n° 21 et du n° 4,

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \sum_{\lambda\mu} \bar{w}_{\lambda\mu}(\bar{x}) \bar{K}_{\lambda\mu} = B' \left(\sum_{g^k} B_{g^k} B_{k\mu} \bar{w}_{\lambda\mu} K_{g^k} \right) B'^{-1} \\ &= B' J B'^{-1} = B' \left(\sum_{g^k} w_{g^k} K_{g^k} \right) B'^{-1}. \end{aligned}$$

Puis

$$\alpha = \sum_{g^k} K_{g^k} \left(w_{g^k} - \sum_{\lambda\mu} B_{g^k} B_{k\mu} \bar{w}_{\lambda\mu} \right) = \sum_{g^k} K_{g^k} \eta_{g^k} = K(\eta)$$

avec les notations du n° 7, et en posant

$$\eta_{g^k} = w_{g^k} - \sum_{\lambda\mu} B_{g^k} B_{k\mu} \bar{w}_{\lambda\mu}.$$

La matrice n — aire $K(\eta)$ ne peut s'évanouir que si tous les η_{g^k} sont nuls. Donc

$$\begin{aligned} w_{g^k} &= \sum_{\lambda\mu} \bar{w}_{\lambda\mu} B_{g^k} B_{k\mu} = [B'^{-1} \bar{W} B'^{-1}]_{g^k}, \\ W &= B'^{-1} \bar{W} B'^{-1}, \\ (15) \quad \bar{W}(x) &= B W(x) B. \end{aligned}$$

24. D'après les théories bien connues de Weierstrass et en vertu

de la formule (15), les *Elementarteiler* du faisceau

$$\varphi W + W'$$

de matrices n — aires sont des covariants.

Autrement dit, décomposons les déterminants

$$|\varphi W(x) + W'(x)| \quad \text{et} \quad |\varphi \overline{W}(\bar{x}) + \overline{W}'(\bar{x})|$$

considérés comme polynômes en φ en leurs *Elementarteiler*,

$$|\varphi W(x) + W'(x)| = |W(x)|^{\varpi} \Pi [\varphi - a(x)]^m,$$

$$|\varphi \overline{W}(\bar{x}) + \overline{W}'(\bar{x})| = |\overline{W}(\bar{x})|^{\overline{\varpi}} \Pi [\varphi - \bar{a}(\bar{x})]^{\overline{m}}.$$

Il viendra

$$|\overline{W}(\bar{x})| = |W(x)|; \quad \bar{a}(\bar{x}) = a(x); \quad \overline{\varpi} = \varpi; \quad \overline{m} = m.$$

Les exposants m et ϖ , les fonctions $|W|$ et a ont leurs valeurs indépendantes du choix des fondamentaux ε et sont invariants vis-à-vis de toute transformation par la substitution B .

En particulier et comme il fallait s'y attendre, *le rang de W , indice de monogénéité pour la fonction X (17) de la variable hyper-complexe x , ne dépend pas du choix des nombres fondamentaux dans le groupe (ε) .*

23. Les relations étroites qui existent entre la matrice W et la matrice jacobienne J s'expliquent, puisque les éléments $X_{\alpha\beta}$ de J sont les coordonnées spéciales dans le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ de la quantité w qui a déjà, dans $(\varepsilon\varepsilon)$, les éléments de W pour coordonnées (13).

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION DE LA MATRICE $W(x)$.

26. Reprenant les coordonnées spéciales, je vais chercher comment la matrice n — aire W se déduit de la jacobienne J des fonctions X par rapport aux variables x .

27. Prenons $r^4 = n^2$ quantités

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r).$$

Disposons-les en éléments d'une matrice n — aire W en plaçant :

Dans une même ligne, les w où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même;

Dans une même colonne, les w où la combinaison $\gamma\delta$ est la même.

On range, d'ailleurs, les $\alpha\beta$ ou les $\gamma\delta$ dans l'ordre suivant :

$$11, \quad 12, \quad \dots, \quad 1r; \quad 21, \quad 22, \quad \dots, \quad 2r; \quad \dots; \quad r1, r2, \dots, rr.$$

La matrice W est ainsi répartie en r bandes horizontales, numérotées $1, 2, \dots, \alpha, \dots, r$, comprenant chacune les r lignes $\alpha\beta$, où le premier indice est α .

Il y a de même, dans W , r bandes verticales, numérotées $1, 2, \dots, \gamma, \dots, r$, comprenant chacune les r colonnes $\gamma\delta$, où le premier indice est γ .

Les intersections des bandes horizontales et verticales, d'indices α et γ respectivement, décomposent W en $r^2 = n$ matrices partielles r — aires qu'on peut appeler $\theta_{\alpha\gamma}$.

On posera

$$W = \{ \theta_{\alpha\gamma} \} \quad w_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\theta_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta}$$

pour indiquer que, dans la matrice r — aire, $\theta_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est l'élément de la $\beta^{\text{ième}}$ ligne et de la $\delta^{\text{ième}}$ colonne.

Les matrices $\theta_{\alpha\gamma}$, assimilées à des lettres à deux indices, donnent une matrice r — aire

$$\Theta = [\theta_{\alpha\gamma}],$$

canevas de la matrice W .

28. Transposons le canevas. On aura la matrice n — aire

$$W_1 = \{ \theta_{\gamma\alpha} \}.$$

Si je transpose chaque matrice partielle, j'obtiens la matrice n — aire

$$W_2 = \{ \theta'_{\alpha\gamma} \}.$$

La transposition de la matrice n — aire W elle-même est le produit

des transpositions précédentes. On a

$$W' = \{ \theta'_{\gamma\alpha} \}.$$

On vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} W &= (W_1)'_1 = (W_2)_2; & W'_1 &= W_2; & W'_2 &= W_1, \\ W' &= (W_1)_2 = (W_2)'_1; & (W_1)' &= W_2; & (W_2)' &= W_1. \end{aligned}$$

29. Soient deux matrices n — aires, telles que W , A et B , décomposées en matrices partielles r — aires,

$$A = \{ g_{\alpha\beta} \}, \quad B = \{ h_{\alpha\beta} \},$$

et les substitutions n — aires,

$$\begin{aligned} A &= \left| x_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} x_{\gamma\delta} \right| \\ B &= \left| x_{\gamma\delta} \sum_{\lambda\mu} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} x_{\lambda\mu} \right| \\ AB &= \left| x_{\alpha\beta} \sum_{\lambda\mu} x_{\lambda\mu} [K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} \right|, \\ [K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} &= \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} = \sum_{\gamma} [g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}]_{\beta\mu}, \\ K_{\alpha\lambda} &= \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}. \end{aligned} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, r).$$

On voit que le canevas du produit AB est constitué par les matrices r — aires,

$$K_{\alpha\lambda} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}; \quad AB = \{ K_{\alpha\lambda} \};$$

$K_{\alpha\lambda}$ est symboliquement l'élément de ligne α et de colonne λ dans la matrice r — aire $K = gh$, produit des deux matrices r — aires

$$g = [g_{\alpha\gamma}], \quad h = [h_{\gamma\lambda}].$$

On peut donc dire que symboliquement le canevas d'un produit est le produit des canevas des facteurs.

50. Reprenons la fonction

$$X = \sum_{\alpha\hat{\gamma}} \varepsilon_{\alpha\hat{\gamma}} X_{\alpha\hat{\gamma}},$$

la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma},$$

et posons [18, form. (10)],

$$w_{\alpha\beta\gamma\hat{\gamma}} = \frac{\partial X_{\alpha\hat{\gamma}}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \frac{\partial X_{\alpha\hat{\gamma}}}{\partial z_{\gamma\hat{\beta}}}, \quad z_{\gamma\hat{\beta}} = x_{\beta\gamma}.$$

Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\hat{\gamma}}$ suivant les lignes $\alpha\hat{\gamma}$ et les colonnes $\gamma\hat{\beta}$, nous obtenons la matrice W . Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\hat{\gamma}}$ suivant les lignes $\alpha\hat{\gamma}$ et les colonnes $\gamma\hat{\beta}$, nous obtenons la matrice H , jacobienne des X par rapport aux variables z .

On passe donc de W à H , on réciproquement, en permutant dans les $w_{\alpha\beta\gamma\hat{\gamma}}$ les indices β et $\hat{\gamma}$, tandis que les indices α et γ restent fixes.

Considérons les canevas (29)

$$W = \begin{bmatrix} \theta_{\alpha\gamma} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \nu_{\alpha\gamma} \end{bmatrix}.$$

On a

$$w_{\alpha\beta\gamma\hat{\gamma}} = \frac{\partial X_{\alpha\hat{\gamma}}}{\partial z_{\gamma\hat{\beta}}} = \begin{bmatrix} \theta_{\alpha\gamma} \end{bmatrix}_{\beta\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \nu_{\alpha\gamma} \end{bmatrix}_{\hat{\gamma}\beta},$$

c'est-à-dire

$$\nu_{\alpha\gamma} = \theta'_{\alpha\gamma}.$$

Nous reportant au n° 27, nous dirons que $H = W_2$ ou $W = H_2$, ou bien que, *pour passer de H à W , ou réciproquement, il suffit de transposer des matrices r — aires partielles.*

51. Comment se modifie la matrice W , lorsqu'on effectue un changement des variables scalaires?

Nommons, pour abréger le langage, $J\left(\begin{smallmatrix} r \\ x \end{smallmatrix}\right)$ la matrice jacobienne des n fonctions y par rapport aux n variables x , de façon que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \left| J\left(\begin{smallmatrix} r \\ x \end{smallmatrix}\right) \right|.$$

On écrira donc

$$J = J \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}, \quad H = J \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix}.$$

Posons $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \dots, t_n)$. Il viendra

$$J \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}.$$

Avec les variables t , la matrice W devient (50)

$$\left[J \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} \right]_2 = \left[J \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right]_2.$$

52. Traitons la même question en coordonnées générales.

On a (4 et 7)

$$J = J \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} = K(u) = \sum_{\lambda \mu} u_{\lambda \mu} K_{\lambda \mu}.$$

Pour changer de variables scalaires, posons

$$x_\alpha = f_\alpha(y_1, \dots, y_n).$$

On aura

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K(v) = \sum_{\lambda \mu} v_{\lambda \mu} K_{\lambda \mu},$$

$$J \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K(u) K(v) = K(w).$$

Par conséquent on peut énoncer le théorème suivant, en nous reportant aux considérations du Chapitre II.

THEOREME. — *Considérons la fonction X de la variable hypercomplexe x et la fonction x de la variable hypercomplexe y , enfin la fonction X de la variable hypercomplexe y . Nommons respectivement u , v , w les quantités hypercomplexes du groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ du Chapitre II qui correspondent respectivement à la matrice W :*

Pour la fonction X de x ,

Pour la fonction x de y ,

Pour la fonction X de y .

La grandeur w sera le produit dans le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ des deux grandeurs u et v .

Voilà comment s'introduit utilement le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ dans la présente théorie des fonctions d'une variable hypercomplexe.

55. Démontrons maintenant quelques théorèmes utiles pour la suite.

CHAPITRE V.

PROPOSITIONS DIVERSES.

54. Reprenons, avec nos notations ordinaires, la jacobienne J des fonctions X_α par rapport aux variables x_β , dans

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha}(x_1, \dots, x_n).$$

On a (7)

$$J = K(\alpha) = K(W) = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} S(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu}).$$

Considérons, avec M. Frobenius, la matrice symétrique $P = R(\sigma)$, $\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} x_{\alpha}$ étant la *trace* de $|S(x)|$ (voir *Préliminaires*). On aura [Frobenius, form. (11), § 1, en faisant $\xi = \sigma$], pour tout x ,

$$PS(x) = T'(x)P.$$

De là

$$PJ = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} PS(\varepsilon_{\lambda}) T(\varepsilon_{\mu}) = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_{\lambda}) PT(\varepsilon_{\mu}).$$

Puis

$$\begin{aligned} (PJ)' &= J'P = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_{\mu}) PT(\varepsilon_{\lambda}) \\ &= P \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} S(\varepsilon_{\mu}) T(\varepsilon_{\lambda}) = PK(W'). \end{aligned}$$

Finalement, φ étant un paramètre variable,

$$(16) \quad \begin{cases} J = K(W), & P^{-1}JP = K(W'), \\ \rho J + P^{-1}JP = K(\rho W + W'). \end{cases}$$

En particulier, faisant $\rho = -1$,

$$P^{-1}JP - J = K(W' - W).$$

Chacune des relations

$$W' = W, \quad P^{-1}JP = J$$

entraîne l'autre.

De la seconde on tire

$$(PJ)' = PJ, \quad PJ = \text{symétrique}.$$

Or $P = [p_{\alpha\beta}]$; PJ est la jacobienne des n expressions $Y_\alpha = \sum_{\beta} p_{\alpha\beta} X_\beta$ par rapport aux x_β . La symétrie de la jacobienne indique que l'expression

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} Y_{\alpha} dx_{\alpha} &= \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} X_{\beta} dx_{\alpha} \\ &= \sum_{\beta} X_{\beta} d \sum_{\alpha} p_{\alpha\beta} x_{\alpha} = \sum_{\beta} X_{\beta} dt_{\beta} \end{aligned}$$

est une différentielle exacte et

$$X_{\beta} = \frac{\partial \mathfrak{X}(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_{\beta}}.$$

Ainsi : pour que la matrice W soit symétrique, il faut et il suffit que l'expression

$$\sum_{\alpha} X_{\alpha}(t) dt_{\alpha}, \quad t_{\alpha} = \sum_{\beta} p_{\alpha\beta} x_{\beta}$$

soit une différentielle exacte.

53. On a vu, au Chapitre I, que, si, $(\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$,

$$dX = \sum_i u_i dx v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$u_i = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} u_{i\lambda}, \quad v_i = \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} v_{i\mu},$$

on a

$$w_{j\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}.$$

Transposer la matrice W , c'est donc transposer les grandeurs u_i et v_i .

56. Je vais étudier maintenant le rang N de la matrice W , c'est-à-dire l'indice de monogénéité (17) de la fonction X .

Soit

$$dX = \sum_i u_i dx v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Multiplications X , devant ou derrière, par une constante hypercomplexe quelconque M . On aura encore

$$d(MX) = M dX = \sum_i M u_i dx v_i,$$

$$d(XM) = dX M = \sum_i u_i dx v_i M,$$

et la multiplication, devant ou derrière, par une constante quelconque ne peut augmenter l'indice de monogénéité.

Employons les coordonnées spéciales et prenons la fonction $u = r^2$,

$$X = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r)$$

avec l'indice N de monogénéité. La fonction

$$X = \varepsilon_{j\mu} X \varepsilon_{\rho\sigma} = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} \varepsilon_{j\mu} \varepsilon_{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}$$

a l'indice de monogénéité $\mathfrak{N} \leq N$. Mais

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\delta} &= 0 & \text{pour} & & \alpha \neq \mu & \text{et} & & \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon_{\mu\delta} = \varepsilon_{\lambda\delta}, \\ \varepsilon_{\lambda\delta} \varepsilon_{\rho\sigma} &= 0 & \text{pour} & & \delta \neq \rho & \text{et} & & \varepsilon_{\lambda\rho} \varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\sigma}; \\ \mathfrak{N} &= \varepsilon_{\lambda\sigma} X_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Donc la fonction hypercomplexe obtenue en multipliant $X_{\alpha\delta}$ par un fondamental quelconque a un indice de monogénéité qui ne dépasse pas N .

57. Soit, pour fixer les idées, $\mathfrak{x} = \varepsilon_{11} X_{11}$. Dans la jacobienne H , du n° 50, toutes les lignes sont composées de zéros, sauf la première. Si l'on pose, pour introduire le canevas (27),

$$H = \|\theta_{\alpha\gamma}\| \quad (\alpha, \gamma = 1, 2, \dots, r),$$

il viendra $\theta_{\alpha\gamma} = 0$ pour $\alpha \neq 1$. Dans la matrice r -aire $\theta_{1\gamma}$, la première ligne contient les r dérivées

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial z_{1\delta}} \quad (\delta = 1, 2, \dots, r);$$

les $r-1$ autres lignes sont formées de zéros. Dans la matrice W , obtenue en transposant les matrices partielles r -aires de H ,

$$W = \|\theta'_{\alpha\gamma}\|,$$

on a

$$\theta'_{\alpha\gamma} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq 1.$$

Dans $\theta'_{1\gamma}$, toutes les colonnes, sauf la première, sont composées de zéros. W contient le mineur r -aire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_{11}}{\partial z_{11}} & \dots & \frac{\partial X_{11}}{\partial z_{1r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_{11}}{\partial z_{r1}} & \dots & \frac{\partial X_{11}}{\partial z_{rr}} \end{vmatrix} = |U(X_{11})|.$$

Ainsi toute fonction $X_{\alpha\delta}$ doit être choisie parmi les solutions Ω du

système d'équations aux dérivées partielles obtenu en écrivant que la matrice $U(\Omega)$ a le rang N au plus.

Cette remarque n'a d'intérêt que si $N < r$.

58. Plus généralement, les n fonctions $X_{x\beta}$, pour une fonction X à indice donné N de monogénéité, doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, obtenu en annulant, dans la matrice W , tous les mineurs $(N+1)$ -aires.

C'est la méthode qu'on appliquera au Chapitre suivant pour le cas $N=1$.

Je terminerai le présent Chapitre en résolvant deux problèmes auxiliaires, d'ailleurs assez élémentaires, mais utiles par la suite. Ils sont relatifs tous deux à la matrice r -aire

$$K = [K_{x\beta}], \quad K_{x\beta} = \text{const.} \quad (x, \beta = 1, 2, \dots, r)$$

de rang \mathfrak{A} .

59. Faisons d'abord $\mathfrak{A}=1$, $K_{x\beta} = g_x h_\beta$. E étant la r -aire unité, considérons le déterminant caractéristique $\Delta = |\rho E - K|$. Comme $\mathfrak{A}=1$, ρ divise Δ , ainsi que les premiers, seconds, ... $(r-l)$ -ièmes mineurs, déterminants l -aires pour $l=2, 3, \dots, r$. Δ comporte donc $r-1$ *Elementarteiler* divisibles par ρ et

$$\Delta = \rho^{m_0} \dots \rho^{m_{r-1}} f(\rho),$$

$m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{r-2}$, $f(\rho)$ ayant le degré σ ,

$$r = \sigma + m_0 + \dots + m_{r-2}.$$

Posons $m_0 = 1 + \delta_0$, ..., les δ étant positifs ou nuls. Il viendra

$$r = \sigma + r - 1 + \delta_0 + \dots + \delta_{r-2},$$

$$\delta_0 + \dots + \delta_{r-2} = 1 - \sigma.$$

Si

$$\sigma = 1, \quad \delta_0 = \dots = \delta_{r-2} = 0,$$

Tous les *Elementarteiler* sont linéaires et la matrice K est canoni-

sable. Transformant K par une r -aire convenable, on peut faire $K_{\alpha\alpha} \neq 0$ tous les autres $K_{\alpha\beta} = 0$.

Si

$$\sigma = 0, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_1 = \dots = \delta_{r-1} = 0,$$

$$\Delta = \rho^2 \rho \dots \rho,$$

K est semblable à une matrice où l'élément de la première ligne et de la deuxième colonne est égal à 1 et seul différent de zéro. Pour toutes explications, je renverrai, par exemple, à la première Partie et au Chapitre I de mon Mémoire : *Sur les formes mixtes* (Gauthier-Villars, 1905). Bref, on pourra supposer encore

$$K_{42} = g_4 h_2 = 1, \quad K_{\alpha\beta} = 0.$$

Ces remarques seront utiles plus loin (58).

40. Faisons le rang de la matrice K , $k > 1$, et envisageons les n fonctions

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r),$$

$$\zeta_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma},$$

où les $n = r^2$ variables x sont indépendantes.

Les $\zeta_{\alpha\gamma}$ sont liées par $r(r-1)$ relations distinctes

$$(M) \quad \sum_a m_{\rho a} z_{a\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \dots, r; \rho = 1, 2, \dots, r - k)$$

et seulement par celles-là.

Dans le Tableau à $r - \mathfrak{L}$ lignes et r colonnes

$$\begin{array}{c} m_{1,1}, \dots, m_{1,r}, \\ \vdots \\ m_{l-1,1}, \dots, m_{l-1,r}, \end{array}$$

un au moins des déterminants $(r - \mathfrak{K})$ -aires, par exemple celui des $r - \mathfrak{K}$ dernières colonnes, est différent de zéro.

On peut résoudre (M) par rapport aux $r - \mathfrak{K}$ quantités $\zeta_{\pi\gamma}$ (où $\pi = \mathfrak{K} + 1, \mathfrak{K} + 2, \dots, r$), qui se trouveront exprimées à l'aide des $\zeta_{1\gamma}, \dots, \zeta_{\mathfrak{K}\gamma}$.

En résumé, *les $r\mathfrak{K}$ quantités*

$$\zeta_{\sigma\gamma}, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \mathfrak{K}; \gamma = 1, 2, \dots, r)$$

peuvent varier librement.

Supposons maintenant que les r expressions, fonctions des $\zeta_{x\gamma}$,

$$\mathfrak{Q}_x(\zeta_{x1}, \dots, \zeta_{x\gamma}, \dots, \zeta_{xr}) \quad (x = 1, 2, \dots, r)$$

aient une valeur commune Ω . Je dis que Ω est une constante, les \mathfrak{Q}_σ ne dépendant plus des ζ .

En effet, si $\mathfrak{K} > 1$, on aura en particulier

$$\mathfrak{Q}_1(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{1r}) = \mathfrak{Q}_2(\zeta_{21}, \dots, \zeta_{2r}).$$

Comme il ne peut exister entre les $\zeta_{\sigma\gamma}$ aucune relation, il faut que chacune des expressions \mathfrak{Q}_1 et \mathfrak{Q}_2 soit indépendante des ζ et séparément égale à une même constante Ω . Pour le même motif, la relation $\mathfrak{Q}_\sigma = \Omega$ entraîne l'indépendance des \mathfrak{Q}_σ par rapport aux ζ . Quant aux relations

$$\mathfrak{Q}_x = \Omega \quad (x = \mathfrak{K} + 1, \dots, r),$$

elles doivent être une conséquence du système (M).

Ces remarques seront utiles plus loin (§ 48).

41. Prenons les coordonnées

$$x_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r; n = r^2)$$

et la matrice r -aire adhérente (*Preliminaires*, § 9)

$$(x) = [x_{\alpha\beta}],$$

ainsi qu'une constante hypercomplexe g , avec sa matrice r -aire (g).

Remplacer la matrice (x) par la matrice

$$(g)^{-1}(x)(g),$$

c'est effectuer, sur les n coordonnées de x dans le groupe (ε) , une certaine substitution linéaire n — aire B , de déterminant $\neq 0$, c'est-à-dire effectuer dans (ε) un changement de fondamentaux. Cette question a été discutée aux nos 19 à 24. La jacobienne $J = J\left(\begin{smallmatrix} X \\ x \end{smallmatrix}\right)$ devient (21, *in fine*)

$$\bar{J} = B'JB^{-1}.$$

Or on peut choisir la r — aire (g) de façon que dans \bar{J} aucun élément ne soit nul. D'autre part, l'intervention de la r — aire (g) n'a pas pour effet de changer dans (ε) la formule de multiplication et *les coordonnées restent spéciales*.

Tout cela revient à dire qu'il est licite de supposer différente de zéro *chacune* des n^2 dérivées partielles, éléments de la jacobienne $J = \left(\begin{smallmatrix} X \\ x \end{smallmatrix}\right)$ ou de la jacobienne $H = \left(\begin{smallmatrix} X \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta}$.

C'est ce que nous ferons au cours de la discussion qui remplit le Chapitre suivant.

42. On est maintenant à même d'aborder la construction d'une fonction X , ayant l'indice un de monogénéité.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE AVEC L'INDICE un DE MONOGÉNÉITÉ.

45. Je vais construire les fonctions

$$(x, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \dots = 1, 2, \dots, r; n = r^2),$$

$$X = \sum_{x\delta} \varepsilon_{x\delta} X_{x\delta}(x', \dots, x'_{rr})$$

de la variable hypercomplexe

$$x' = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x'_{\beta\gamma}$$

ou

$$z = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} z_{\gamma\beta}, \quad u_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta},$$

de façon que l'indice N de monogénéité soit un ; alors

$$(17) \quad dX = u dxv.$$

Reprenons les jacobienues $J = J\left(\begin{smallmatrix} X \\ x \end{smallmatrix}\right)$ et $H = J\left(\begin{smallmatrix} X \\ z \end{smallmatrix}\right)$ et leurs canevas (27). Il viendra (50)

$$H = \{v_{\alpha\gamma}\}, \quad W = H_2 = \{v'_{\alpha\gamma}\}$$

avec

$$\frac{\partial \lambda_{x\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \{v_{\alpha\gamma}\}_{\beta\delta} = \{v'_{\alpha\gamma}\}_{\beta\delta}.$$

44. La u — aire W a, par hypothèse, le rang un ; la r — aire $v_{x\gamma}$ ne peut, puisque $r \geq 2$, avoir pour rang que un ou zéro. La seconde supposition est inadmissible, puisque aucune des dérivées partielles n'est zéro (41). D'autre part, $v_{x\gamma}$ est la jacobienne des r fonctions

$$\lambda_{x1}, \dots, \lambda_{x\delta}, \dots, \lambda_{xr},$$

par rapport aux r variables

$$z_{\gamma 1}, \dots, z_{\gamma\beta}, \dots, z_{\gamma r},$$

$$v_{x\gamma} = J\left(\begin{smallmatrix} \lambda_{x1} & \dots & \lambda_{xr} \\ z_{\gamma 1} & \dots & z_{\gamma r} \end{smallmatrix}\right).$$

Le rang étant un , les $\lambda_{x\delta}$ ne dépendent pas des $z_{\gamma\beta}$, mais d'une fonction unique

$$(18) \quad \bar{w}_{\alpha\gamma}(z_{\gamma 1}, \dots, z_{\gamma\beta}, \dots, z_{\gamma r}),$$

indépendante de l'indice δ .

Considérant de même les matrices v_{x1}, \dots, v_{xr} , on voit que

$$(19) \quad \lambda_{x\delta} = \lambda_{x\delta}(\bar{w}_{x1}, \bar{w}_{x2}, \dots, \bar{w}_{x\gamma}, \dots, \bar{w}_{xr}).$$

45. Formons $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$. $X_{\alpha\delta}$ ne contient les z que par l'intermédiaire des ϖ .

$z_{\gamma\beta}$ ne figure que dans les ϖ où le second indice est γ . $X_{\alpha\delta}$ ne contient que les ϖ où le premier indice est α . Donc

$$(20) \quad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}.$$

D'autre part, la formule (17) donne

$$dX = \sum_{\alpha\delta\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\delta} \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = u \, dx = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} u_{\alpha\beta} dz_{\gamma\beta} \varepsilon_{\gamma\delta},$$

c'est-à-dire

$$(21) \quad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = u_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}};$$

aucun des $u_{\alpha\beta}$ ni des $\varepsilon_{\gamma\delta}$ n'est zéro, puisque aucune des dérivées partielles $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$ n'est nulle.

De (21) on tire, β_0 étant un indice quelconque,

$$(22) \quad \frac{u_{\alpha\beta_0}}{u_{\alpha\beta_0}} = \frac{\frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}}}{\frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}}}.$$

Le second membre de la formule (22) est une fonction des r variables

$$z_{\gamma 1}, \quad \dots, \quad z_{\gamma r}$$

seulement, tandis que le premier membre est indépendant de l'indice γ . Les z sont variables indépendantes et il ne peut exister entre elles aucune relation. Donc, ni le premier, ni le second membre de (22) ne dépendent des z ; ils sont égaux à une même constante $K_{\alpha\beta}$, indépendante de l'indice γ .

Si l'on pose

$$\theta_{\alpha} = u_{\alpha\beta_0}, \quad \varphi_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}},$$

l'indice β_0 étant fixe, on pourra écrire

$$(23) \quad u_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha} K_{\alpha\beta}$$

et

$$(24) \quad \frac{\partial \pi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \varphi_{\alpha\gamma} K_{\alpha\beta}.$$

Mais $\pi_{\alpha\gamma}$ ne contient que les r variables $z_{\gamma 1}, \dots, z_{\gamma r}$. Donc

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \pi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = d\pi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma} d \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} z_{\gamma\beta}.$$

46. Posons

$$(25) \quad \zeta_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} z_{\gamma\beta} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} d_{\beta\gamma}.$$

Il viendra

$$d\pi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma} d'_{\zeta_{\alpha\gamma}};$$

$\pi_{\alpha\gamma}$ est une fonction de la seule quantité $\zeta_{\alpha\gamma}$,

$$\pi_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}).$$

Mais, dans la formule (19), il est indifférent d'écrire

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}[\dots, f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}), \dots],$$

ou bien, $X_{\alpha\delta}$ étant une fonction arbitraire,

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\dots, \zeta_{\alpha\gamma}, \dots).$$

Cela revient à faire

$$\varphi_{\alpha\gamma} = 1, \quad \pi_{\alpha\gamma} = \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \frac{\partial \pi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = K_{\alpha\beta}.$$

Combinant avec les formules (20), (21) et (25), il vient

$$(26) \quad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\alpha}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} K_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = \theta_{\alpha} K_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta},$$

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \theta_{\alpha} v_{\gamma\delta}.$$

47. De (26) on tire

$$(27) \quad v_{\gamma\delta} : v_{\gamma'\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} : \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}}.$$

Le second membre de (27) est, comme $X_{\alpha\delta}$ et $X_{\alpha'\delta}$, une fonction de r variables

$$\zeta_{\alpha 1}, \quad \dots, \quad \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \dots, \quad \zeta_{\alpha r},$$

tandis que le premier est indépendant de l'indice α . Les r expressions obtenues en faisant dans le second membre $\alpha = 1, 2, \dots, r$ ont une valeur commune, qui ne dépend que de $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$. On est ainsi dans le cas traité au n° 40; il faut distinguer les cas où le rang \mathfrak{K} de la matrice r — aire $K = [K_{\alpha\beta}]$ est > 1 ou $= 1$.

48. Faisons d'abord $\mathfrak{K} > 1$. Alors (40) le premier membre de (27) ne dépend pas des variables ζ et, les indices γ_0 et δ_0 étant fixés arbitrairement, avec $\omega = v_{\gamma_0\delta_0}$, on a

$$(28) \quad v_{\gamma\delta} = \omega l_{\gamma\delta}, \quad l_{\gamma\delta} = \text{const.};$$

$$(29) \quad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \omega \theta_{\alpha} l_{\gamma\delta},$$

sous le bénéfice de (26).

De (29) on tire

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma} \partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = l_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} \omega \theta_{\alpha} = l_{\gamma'\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega \theta_{\alpha},$$

et, changeant δ en δ' ,

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma} \partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = l_{\gamma\delta'} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} \omega \theta_{\alpha} = l_{\gamma'\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega \theta_{\alpha}.$$

De là, ou bien

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega \theta_{\alpha} = 0,$$

ou bien

$$(31) \quad \begin{vmatrix} l_{\gamma\delta} & l_{\gamma'\delta} \\ l_{\gamma\delta'} & l_{\gamma'\delta'} \end{vmatrix} = 0.$$

49. En vertu de (29), $\omega\theta_x$ ne peut dépendre, comme $X_{z\bar{z}}$, que des variables

$$\zeta_{x1}, \dots, \zeta_{x\gamma}, \dots, \zeta_{x\gamma}, \dots, \zeta_{x\gamma}.$$

La formule (30) exprime donc que $\omega\theta_x$ est une constante, ainsi que, en vertu de (29), l'expression $\frac{\partial X_{z\bar{z}}}{\partial \zeta_{x\gamma}}$. Il vient alors

$$dX_{z\bar{z}} = \sum_{\gamma} \frac{\partial X_{z\bar{z}}}{\partial \zeta_{x\gamma}} d\zeta_{x\gamma} = \omega\theta_x \sum_{\gamma} L_{\gamma\bar{z}} d\zeta_{x\gamma} = \omega\theta_x d \sum_{\gamma} L_{\gamma\bar{z}} \zeta_{x\gamma}.$$

Tenons compte de (25), on a

$$(32) \quad \begin{cases} dX_{z\bar{z}} = \omega\theta_x \sum_{\gamma\beta} K_{z\beta} dz_{\gamma\beta} L_{\gamma\bar{z}} \\ = \omega\theta_x \sum_{\gamma\beta} K_{z\beta} dx_{\beta\gamma} L_{\gamma\bar{z}} = d(KxL)_{z\bar{z}}, \end{cases}$$

fondant la constante $\omega\theta_x$ dans la constante $K_{z\beta}$. Quant à $(KxL)_{z\bar{z}}$, c'est la coordonnée d'indices $z\bar{z}$ pour la quantité hypercomplexe KxL , produit des trois quantités hypercomplexes x , K , de coordonnées $K_{z\beta}$, et L , de coordonnées $L_{\gamma\bar{z}}$.

De (32) on tire finalement

$$(33) \quad \begin{aligned} dX &= \sum_{z\bar{z}} \varepsilon_{z\bar{z}} dX_{z\bar{z}} = d(KxL), \\ X &= KxL + M, \quad M = \text{const.}, \end{aligned}$$

solution banale.

50. La condition (31) exprime que la matrice $L = [L_{\gamma\bar{z}}]$ a le rang un . Alors [en vertu de (29)],

$$(34) \quad L_{\gamma\bar{z}} = l_{\gamma} m_{\bar{z}}, \quad \frac{\partial \Lambda_{z\bar{z}}}{\partial \zeta_{x\gamma}} = \omega\theta_x l_{\gamma} m_{\bar{z}} \quad (l_{\gamma}, m_{\bar{z}} = \text{const.}),$$

$$dX_{z\bar{z}} = \sum_{\gamma} \frac{\partial \Lambda_{z\bar{z}}}{\partial \zeta_{x\gamma}} d\zeta_{x\gamma} = \omega\theta_x \sum_{\gamma} m_{\bar{z}} l_{\gamma} d\zeta_{x\gamma} = \omega m_{\bar{z}} \theta_x dt_x,$$

$$(35) \quad l_x = \sum_{\gamma} l_{\gamma} \zeta_{x\gamma}.$$

Alors $m_z^{-1}X_{z\beta}$ ne dépend que de t_x .

$$(36) \quad X_{z\beta} = m_z \psi_x(t_x), \quad \psi_x = \text{fonction arbitraire.}$$

34. Ces conditions sont suffisantes, car

$$dX_{z\beta} = m_z \psi'_x(t_x) \sum_{\gamma} l_{\gamma} dx_{\gamma} = m_z \psi'_x(t_x) \sum_{\gamma\beta} K_{x\beta} dx_{\beta\gamma} l_{\gamma},$$

sous le bénéfice de (25). Il suffit de poser, en égard à (21),

$$\begin{cases} u_{x\beta} = \psi'_x(t_x) K_{x\beta} \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\beta} = m_z l_{\gamma} \mathfrak{P}^{-1} \end{cases} \quad \left| \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x, \right.$$

pour avoir

$$dX = u dx v.$$

L'indice de monogénéité est bien égal à uu .

32. La discussion de l'éventualité $\mathfrak{K} > 1$ (47, *in fine*) est ainsi épuisée. L'éventualité a fourni la *solution banale* du n° 49 et la *première solution* donnée par le n° 30.

Passons à l'éventualité $\mathfrak{K} = 1$.

35. Alors $K_{x\beta} = g_x h_{\beta}$, g_x et h_{β} étant des constantes,

$$(37) \quad \tilde{z}_{x\gamma} = \sum_{\beta} K_{x\beta} z_{\gamma\beta} = \sum_{\beta} K_{x\beta} dx_{\beta\gamma} = g_x q_{\gamma},$$

$$(38) \quad q_{\gamma} = \sum_{\beta} h_{\beta} z_{\gamma\beta} = \sum_{\beta} h_{\beta} dx_{\beta\gamma}$$

et, en égard à (19),

$$(39) \quad X_{z\beta} = X_{z\beta}(\tilde{z}_{z1}, \tilde{z}_{z2}, \dots, \tilde{z}_{z\gamma}, \dots, \tilde{z}_{zr}) = X_{z\beta}(q_1, \dots, q_{\gamma}, \dots, q_r),$$

et les r variables q_{γ} sont indépendantes, puisqu'elles ne dépendent pas des mêmes z .

Alors [sous le bénéfice de (20) et (21)]

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial X_{x\hat{\gamma}}}{\partial z_{\gamma\beta}} &= \frac{\partial X_{x\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = h_{\beta} \frac{\partial X_{x\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} = u_{x\beta} v_{\gamma\hat{\gamma}} = \theta_x k_{x\beta} v_{\gamma\hat{\gamma}} = e_x h_{\beta} \theta_x v_{\gamma\hat{\gamma}}, \\ \frac{\partial X_{x\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} &= e_x \theta_x v_{\gamma\hat{\gamma}}, \end{aligned}$$

$$(41) \quad \begin{aligned} dX_{x\hat{\gamma}} &= \sum_{\gamma} \frac{\partial X_{x\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} dq_{\gamma} = e_x \theta_x \sum_{\gamma} v_{\gamma\hat{\gamma}} dq_{\gamma}, \\ \sum_{\gamma} v_{\gamma\hat{\gamma}} dq_{\gamma} &= \frac{dX_{x\hat{\gamma}}}{e_x \theta_x} = \frac{dX_{x\hat{\gamma}}}{e_x \theta_x}, \\ \left\{ \begin{aligned} dX_{x\hat{\gamma}} &= r_{1x} d\Lambda_{\hat{\gamma}}, \\ r_{1x} &= \frac{e_x \theta_x}{e_{x_0} \theta_{x_0}}, \quad \Lambda_{\hat{\gamma}} = X_{x\hat{\gamma}}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

De là

$$(42) \quad X_{x\hat{\gamma}} = \psi_{x\hat{\gamma}}(\Lambda_{\hat{\gamma}}), \quad \psi'_{x\hat{\gamma}}(\Lambda_{\hat{\gamma}}) = r_{1x}.$$

54. Supposons d'abord $r_{1x} = \text{const.}$ et que, par suite, dans la formule (23), on ait

$$\theta_x = e_x \Theta \quad (e_x = \text{const.}).$$

L'on tire alors de (42)

$$(43) \quad X_{x\hat{\gamma}} = r_{1x} \Lambda_{\hat{\gamma}} + M_{x\hat{\gamma}}, \quad M_{x\hat{\gamma}} = \text{const.}$$

Ce sera la *seconde solution*, car les conditions trouvées sont suffisantes. En effet, en égard à (38),

$$dX_{x\hat{\gamma}} = r_{1x} d\Lambda_{\hat{\gamma}} = r_{1x} \sum_{\gamma} \frac{\partial \Lambda_{\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} dq_{\gamma} = r_{1x} \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial \Lambda_{\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} h_{\beta} dx'_{\beta\gamma}.$$

Pour assurer les formules (17) ou (21), il suffit de faire

$$\begin{aligned} u_{x\beta} &= r_{1x} h_{\beta} \mathfrak{P} \left(\mathfrak{P} \right) \\ v_{\gamma\hat{\gamma}} &= \frac{\partial \Lambda_{\hat{\gamma}}}{\partial q_{\gamma}} \mathfrak{P} \left(\mathfrak{P} \right) \end{aligned} \quad \mathfrak{P} \text{ fonction quelconque des } x.$$

35. Supposons enfin qu'une au moins des τ_{iz} ne soit pas une constante.

Alors (42) donne

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{iz} = \psi'_{z\bar{z}}(\Lambda_{\bar{z}}) = \psi'_{z\bar{z}_a}(\Lambda_{\bar{z}_a}) = \psi'_{z\bar{z}_a}(\omega), \\ \omega = \Lambda_{\bar{z}_a}; \end{array} \right.$$

ω n'est sûrement pas une constante, puisque τ_{iz} est variable. Pour le même motif

$$\psi'_{z\bar{z}}(\Lambda_{\bar{z}}) \neq 0, \quad \text{car} \quad \psi'_{z\bar{z}}(\Lambda_{\bar{z}}) \neq \text{const.}$$

La relation

$$\psi'_{z\bar{z}}(\Lambda_{\bar{z}}) = \psi'_{z\bar{z}_a}(\omega)$$

peut être résolue par rapport à $\Lambda_{\bar{z}}$ et $\Lambda_{\bar{z}}$ est une fonction de la variable ω . En vertu de (42), $X_{z\bar{z}}$ ne dépend non plus que de ω . Pareillement pour τ_{iz} .

Alors

$$(45) \quad \frac{dX_{z\bar{z}}}{d\omega} = \frac{dX_{z\bar{z}}}{d\Lambda_{\bar{z}}} \frac{d\Lambda_{\bar{z}}}{d\omega} = \tau_{iz} f'_{\bar{z}}(\omega).$$

36. Les conditions trouvées sont suffisantes, car

$$dX_{z\bar{z}} = \tau_{iz} f'_{\bar{z}}(\omega) d\omega = \tau_{iz} f'_{\bar{z}} \sum_{\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial q_{\gamma}} dq_{\gamma} = \tau_{iz} f'_{\bar{z}} \sum_{\gamma \bar{\gamma}} \frac{\partial \omega}{\partial q_{\gamma}} h_{\bar{\gamma}} dx_{\bar{\gamma}\gamma}.$$

Pour assurer la formule (17), il suffit de poser

$$\left. \begin{array}{l} u_{i\bar{j}} = \tau_{iz} h_{\bar{j}} \mathfrak{P} \\ v_{j\bar{i}} = \frac{\partial \omega}{\partial q_{\gamma}} f'_{\bar{i}} \mathfrak{P}^{-1} \end{array} \right\} \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x.$$

Ce sera la *troisième solution*.

37. Si l'on omet la solution banale $X = KxL + M$ du n° 49 et les facteurs \mathfrak{P} et \mathfrak{P}^{-1} aisés à rétablir, la discussion du présent Chapitre

se résume ainsi, comme expressions trouvées pour .

$$X = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta}, \quad d\lambda = u dx v,$$

$$u = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}, \quad v = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} v_{\gamma\delta}.$$

Première solution (n° 50 et 51).

$$\lambda_{\alpha\beta} = m_\beta \psi_\alpha(t_\alpha), \quad t_\alpha = \sum_{\beta\gamma} k_{\alpha\beta} l_\gamma v_{\beta\gamma},$$

$$\psi_\alpha = \text{fonction arbitraire},$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \psi_\alpha(t_\alpha) K_{\alpha\beta} \\ v_{\gamma\delta} &= l_\gamma m_\delta \end{aligned} \right\} K_{\alpha\beta}, l_\gamma, m_\delta = \text{const.}$$

Deuxième solution (n° 54).

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= r_{1\alpha} \Lambda_\beta + M_{\alpha\beta} \\ \Lambda_\beta &= \Lambda_\beta(q_1, \dots, q_r, \dots, q_r) \\ q_\gamma &= \sum_{\beta} h_\beta v_{\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &r_{1\alpha}, M_{\alpha\beta}, h_\beta = \text{const.}, \\ &\Lambda = \text{fonction arbitraire}, \end{aligned}$$

$$u_{\alpha\beta} = r_{1\alpha} h_\beta,$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma}.$$

Troisième solution (n° 56).

$$\lambda_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}(\omega), \quad \psi_{\alpha\beta}(\omega) = r_{1\alpha}(\omega) f_\beta(\omega),$$

$$\omega = \omega(q_1, \dots, q_r, \dots, q_r),$$

$$q_\gamma = \sum_{\beta} h_\beta v_{\beta\gamma} \quad (h_\beta = \text{const.})$$

$$u_{\alpha\beta} = h_\beta r_{1\alpha}(\omega),$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{\partial \omega}{\partial q_\gamma} f'_\delta(\omega),$$

Les résultats précédents ont été obtenus en évitant de prendre des coordonnées trop particulières; notamment on a supposé chacune des

$$\frac{dX_{z\bar{z}}}{dx_{\beta\gamma}} \neq 0.$$

Je me propose maintenant de particulariser au contraire les coordonnées, de façon à donner aux solutions une expression aussi simple que possible.

58. Reportons-nous aux considérations (**41** et **59**) et reprenons la formule (17). Effectuons un changement de coordonnées spéciales, dans le groupe (ε) , de façon que la matrice (y) afférente à une quantité y de (ε') se trouve remplacée par la matrice $(g)^{-1}(y)(g)$. Alors la formule (17) devient

$$(g)^{-1}(dX)(g) = (g)^{-1}(u)(g)(g)^{-1}(dx)(g)(g)^{-1}(v)(g).$$

Cela équivaut à transformer les matrices r — aires

$$(u) = [u_{\alpha\beta}], \quad (v) = [v_{\gamma\delta}]$$

par la matrice r — aire (g) .

Si les $u_{\alpha\beta}$ sont des constantes, on peut supposer (**59**), si (u) a le rang 1, soit $u_{11} = c \neq 0$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls, soit $u_{12} = 1$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls.

Pareillement, si les $v_{\gamma\delta} = \text{const.}$, on pourra faire encore soit v_{11} seul, soit v_{12} seul, différent de zéro, si (v) a le rang 1.

59. Prenons d'abord la *première solution* (**57**). (v) a le rang 1, puisque $v_{\gamma\delta} = l_{\gamma} m_{\delta}$; $l_{\gamma}, m_{\delta} = \text{const.}$

Faisons d'abord v_{11} seul $\neq 0$:

$$l_1 m_1 \neq 0, \quad l_2, \dots, l_r; \quad m_2, \dots, m_r = 0.$$

Les $X_{\alpha 1}$ sont seuls $\neq 0$. De plus

$$(46) \quad \begin{aligned} t_{\alpha} &= l_1 \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} x'_{\beta 1}, \\ X &= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1} \left(\sum_{\beta} k_{\alpha\beta} x'_{\beta 1} \right). \end{aligned}$$

Faisons maintenant v_{12} seul $\neq 0$, $l_1 m_2 \neq 1$. Un calcul simple donne

$$(47) \quad X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 2} X_{\alpha 2} \left(\sum_{\beta} K_{\alpha \beta} x_{\beta 1} \right).$$

Ces deux expressions de X ne sont pas essentiellement différentes, car, multipliant par derrière (56) les deux membres de (47) par le fondamental ε_{21} , on retombe sur (46).

(46) sera donc la formule définitive de la *première solution*, type II de l'*Introduction*.

60. Prenons la *seconde solution* (57). La r -aire

$$(u) = [r_{12} h_{\beta}]$$

est formée de constantes et a le rang 1.

Faisons u_{11} seul $\neq 0$. Les constantes $M_{\alpha \delta}$ n'interviennent qu'en ajoutant une constante à X . Les $X_{1\delta}$ sont seuls $\neq 0$, $q_{\gamma} = x_{1\gamma} h_1$.

$$(48) \quad X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta} (x_{11}, \dots, x_{1\gamma}, \dots, x_{1r}).$$

Si l'on fait $u_{12} = r_{11} h_2$ seul $\neq 0$, $q_{\gamma} = h_2 x_{2\gamma}$.

$$(49) \quad X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta} (x_{21}, \dots, x_{2\gamma}, \dots, x_{2r}).$$

Multiplions par devant, dans (49), les deux membres par le fondamental ε_{21} . Il vient

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{2\delta} X_{1\delta} (x_{21}, \dots, x_{2r}),$$

ce qui ne diffère de (48) que par l'écriture. (48) sera la formule définitive de la *deuxième solution*, type III de l'*Introduction*.

61. Ces multiplications (59 et 60) par un fondamental, par devant ou par derrière, sont licites (56), car elles n'augmentent pas l'indice de monogénéité.

62. Prenons enfin la *troisième solution* (37). Aucune des deux matrices (u) ou (v) n'est composée de constantes. La méthode précédente n'est plus applicable. On laissera à la *troisième solution* l'expression du n° 37. C'est, avec d'insignifiants changements de notations, le type IV de l'*Introduction*.

Recherches sur les fractions continues algébriques ⁽¹⁾;**PAR M. AURIC,**

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

INTRODUCTION.

1. Nous nous proposons, dans cette étude, de perfectionner, sur certains points importants, la détermination des conditions de convergence d'une fraction continue algébrique et de rattacher plus étroitement ce mode de développement si fécond, d'une part à la théorie des fonctions méromorphes et quasi-méromorphes, d'autre part à celle des intégrales définies à coupures déjà envisagées par Hermite et surtout par Stieltjes dans ses mémorables recherches.

En premier lieu il importe de mettre ce mode de développement sous la forme normale, canonique, qui lui convient. A cet effet considérons un polynôme ou une série S_0 ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de la variable et de degré maximum k :

$$S_0 = a_0^k x^k + a_0^{k-1} x^{k-1} + \dots \quad (a_0^k \neq 0).$$

Considérons de même un polynôme ou une série S_1 de degré maximum $k-1$:

$$S_1 = a_1^{k-1} x^{k-1} + a_1^{k-2} x^{k-2} + \dots \quad (a_1^{k-1} \neq 0).$$

En divisant S_0 par S_1 nous obtiendrons comme quotient un binôme

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences mathématiques).

de la forme $\alpha_1 x + \beta_1$ et comme reste un polynôme ou une série S_2 de degré maximum $k-2$:

$$S_2 = a_2^{k-2} x^{k-2} + a_2^{k-3} x^{k-3} + \dots,$$

et, en général, on aura

$$a_2^{k-2} \neq 0.$$

On pourra donc écrire

$$S_0 = (\alpha_1 x + \beta_1) S_1 + S_2.$$

De même, en effectuant la division de S_1 par S_2 , on aura

$$S_1 = (\alpha_2 x + \beta_2) S_2 + S_3$$

avec

$$S_3 = a_3^{k-3} x^{k-3} + a_3^{k-4} x^{k-4} + \dots,$$

et, en général, on aura

$$a_3^{k-3} \neq 0,$$

et ainsi de suite.

Dès lors la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ se développera en fraction continue sous la forme suivante ⁽¹⁾ :

$$(A) \quad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x + \frac{\beta_1}{\alpha_2 x + \beta_2} + \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} + \dots,$$

et il est clair que cette fraction continue sera limitée ou illimitée, selon que $\frac{S_0}{S_1}$ sera réductible ou non à une fraction rationnelle.

Le calcul qui précède est, d'ailleurs, identique au procédé classique pour la recherche du plus grand commun diviseur entre S_0 et S_1 : si S_{n+1} est le premier reste identiquement nul, S_n sera le plus grand commun diviseur cherché et $\alpha_n x + \beta_n$ le dernier dénominateur partiel ⁽²⁾ de la fraction continue.

(1) Notation abrégée très répandue en Allemagne (Baltzer, Müller, etc.).

(2) Terminologie empruntée à l'allemand (*Teilnenner*) de préférence à l'appellation française, *quotient incomplet*, qui peut donner lieu à confusion : nous

Telle est, semble-t-il, la forme normale, canonique (A) sous laquelle se présentera, en général, le développement d'une fraction continue algébrique, si on la considère comme le quotient de deux séries entières dont les degrés maxima diffèrent d'une unité.

2. Toutefois, il pourra arriver exceptionnellement que les m premiers termes d'un reste S_i soient nuls simultanément : dans ce cas le quotient de S_{i+1} par S_i , au lieu d'être un binôme de la forme $\alpha.x + \beta$, sera un polynôme de la forme

$$\alpha.x^{m+1} + \beta.x^m + \dots + \varrho.x + \nu.$$

Si ce fait exceptionnel se présente à chaque division, le développement en fraction continue prendra la forme

$$(B) \quad \frac{S_0}{S_1} = R_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{R_3 + \dots}},$$

dans laquelle R_i représente un polynôme entier de degré déterminé ; mais, de ce qui précède, il résulte clairement que cette forme de développement (B), loin de représenter la forme normale, canonique, représente, au contraire, un développement ayant des propriétés restrictives et exceptionnelles, et, par suite, ne possède nullement le caractère de généralité qu'on serait tenté de lui supposer *a priori*.

5. Il est cependant possible de généraliser la forme normale (A), sans pourtant tomber dans le cas particulier exceptionnel que nous venons de signaler.

Considérons, comme précédemment, le polynôme ou la série S_0 de degré maximum k .

Soit de même un polynôme ou une série S_1 de degré maximum $k-i$:

$$S_1 = a_1^{k-i} x^{k-i} + a_1^{k-i-1} x^{k-i-1} + \dots$$

appellerons de même *numérateurs partiels* (*Theilzähler*) les numérateurs des diverses fractions successives; enfin les S_i seront appelés les *restes* ou les *termes* successifs de la fraction continue.

Divisons S_0 par S_1 et poussons la division jusqu'à obtenir pour le quotient λ_1 , qui est de degré maximum i , un polynôme de la forme

$$\lambda_1 = \alpha_1^i x^i + \alpha_1^{i-1} x^{i-1} + \dots + \alpha_1^{i-m} x^{i-m}.$$

Le reste de la division sera évidemment de degré maximum $k-m-1$ et de la forme

$$- \alpha_2^{k-2i} x^{k-m-1} - \alpha_2^{k-2i-1} x^{k-m-2} - \alpha_2^{k-2i-2} x^{k-m-3} - \dots,$$

et, en général, on aura

$$\alpha_2^{k-2i} \neq 0.$$

Si nous posons

$$S_2 = \alpha_2^{k-2i} x^{k-2i} + \alpha_2^{k-2i-1} x^{k-2i-1} + \dots,$$

on aura

$$S_0 = \lambda_1 S_1 - x^{2i-m-1} S_2.$$

De même, en divisant S_1 par S_2 , on obtiendra

$$S_1 = \lambda_2 S_2 - x^{2i-m-1} S_3$$

avec

$$S_3 = \alpha_3^{k-3i} x^{k-3i} + \alpha_3^{k-3i-1} x^{k-3i-1} + \dots,$$

et ainsi de suite.

Dès lors le développement de $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue prendra la forme

$$(C) \quad \frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 + \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_2} + \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_3} + \dots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^i x^i + \alpha_n^{i-1} x^{i-1} + \dots + \alpha_n^{i-m} x^{i-m}.$$

4. Examinons en premier lieu le cas où λ_n se réduit à un monôme; dans la forme (C), il faut faire $m=0$, ce qui donne

$$(C) \quad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x^i + \frac{x^{2i-1}}{\alpha_2 x^i} + \frac{x^{2i-1}}{\alpha_3 x^i} + \dots$$

En divisant les deux membres par x^i , il vient

$$(D) \quad \frac{S_0}{x^i S_1} = z_1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \dots$$

C'est la forme habituellement employée pour réduire en fraction continue une série entière ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x . Par une transformation facile, cette forme se ramène manifestement à la suivante :

$$(D') \quad \frac{S_0}{x^i S_1} = z_1 + \frac{1}{x_2 x} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4 x} + \frac{1}{x_5} + \dots$$

C'est, à la constante z_1 près, et dans le cas où les z_n sont réels et positifs, la forme qui a fait l'objet des recherches de Stieltjes. Il est clair, d'ailleurs, que cette forme conduira à des résultats différents, du moins au point de vue formel, suivant que l'on s'arrêtera à un dénominateur partiel de rang pair ou de rang impair⁽¹⁾; en groupant deux par deux ces dénominateurs partiels successifs, Stieltjes a montré, par une transformation facile, que la forme (D') se ramène à la forme normale (A), laquelle ne présente plus cet inconvénient ou, pour mieux dire, cette influence de la parité du dernier dénominateur partiel employé.

La forme normale (A) doit donc *a priori* conduire à des résultats plus généraux que la forme (D'); remarquons, d'ailleurs, que cette dernière forme peut être considérée comme un cas particulier exceptionnel de la forme (A) (cas où $z_{2n+1} = \beta_{2n} = 0$).

En divisant les deux membres de (C) par x^{i-1} , il vient

$$(E) \quad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = z_1 x + \frac{x}{x_2 x} + \frac{x}{x_3 x} + \frac{x}{x_4 x} + \dots,$$

laquelle forme se ramène manifestement à

$$(E') \quad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = z_1 x + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3 x} + \frac{1}{x_4} + \dots$$

(1) De même les formules qui permettent de passer d'un développement de Taylor à la fraction continue (D) correspondante ne sont pas les mêmes (voir Chap. VI), suivant que le rang du dénominateur partiel est pair ou impair.

Celle-ci ne diffère de la forme de Stieltjes (D') que par la parité du dénominateur partiel affecté de la variable x ; on peut également considérer cette forme comme un cas particulier de la forme normale (A) (cas où $\alpha_{2n} = \beta_{2n+1} = 0$).

La forme (C') devient également, en posant $x = y^2$ et en divisant les deux membres par y^{2i-1} ,

$$(F) \quad \frac{S_0}{y^{2i-1}S_1} = \alpha_1 y + \frac{1}{\alpha_2 y} + \frac{1}{\alpha_3 y} + \frac{1}{\alpha_4 y} + \dots,$$

dans laquelle tous les dénominateurs partiels, quelle que soit leur parité, sont affectés de la variable $y = \sqrt{x}$; on peut aussi considérer cette forme comme un cas particulier de la forme (A) (cas où $\beta_n = 0$).

Dans les formes (D'), (E'), (F), nous avons ramené les numérateurs partiels à l'unité; on peut faire cette opération sur les dénominateurs partiels et, par une transformation facile, la forme (C') devient

$$(G) \quad \frac{S_0}{\alpha_1 x^i S_1} = 1 + \frac{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 x}}{1} + \frac{\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 x}}{1} + \frac{\frac{1}{\alpha_3 \alpha_4 x}}{1} + \dots$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha_{n-1} \alpha_n} = \rho_n, \quad \frac{1}{x} = z,$$

il vient

$$(G') \quad \frac{z^i S_0}{\alpha_1 S_1} = 1 + \frac{\rho_2 z}{1} + \frac{\rho_3 z}{1} + \frac{\rho_4 z}{1} + \dots$$

qui est également une forme très usitée.

Considérons maintenant le cas où les λ_n sont des binômes; dans la forme (C), il faut faire $m = 1$, ce qui donne

$$(C'') \quad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x^i + \beta_1 x^{i-1} + \frac{x^{2i-2}}{\alpha_2 x^i + \beta_2 x^{i-1}} + \frac{x^{2i-2}}{\alpha_3 x^i + \beta_3 x^{i-1}} + \dots,$$

d'où, en divisant les deux membres par x^{i-1} , on retombe manifestement sur la forme normale (A) :

$$\frac{S_0}{x^{i-1}S_1} = \alpha_1 x + \beta_1 + \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} + \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} + \dots$$

En divisant les deux membres de (C') par x^i , on trouve

$$\frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_2 + \frac{\beta_2}{x}} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_3 + \frac{\beta_3}{x}} + \dots$$

et, en posant $\frac{1}{x} = z$,

$$(II) \quad \frac{z^i S_0}{S_1} = \alpha_1 + \beta_1 z + \frac{z^2}{\alpha_2 + \beta_2 z} + \frac{z^2}{\alpha_3 + \beta_3 z} + \dots$$

De même, en posant $x = y^2$ et en divisant les deux membres de (C') par y^{2i-1} , on trouve

$$\frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = \alpha_1 y + \frac{\beta_1}{y} + \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_2 y + \frac{\beta_2}{y}} + \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_3 y + \frac{\beta_3}{y}} + \dots$$

et, en posant $\frac{1}{y} = v$,

$$(II') \quad \frac{v^{2i-1} S_0}{S_1} = \alpha_1 v + \beta_1 v + \frac{v^2}{\frac{\alpha_2}{v} + \beta_2 v} + \frac{v^2}{\frac{\alpha_3}{v} + \beta_3 v} + \dots$$

5. En résumé, on verrait que les formes normales généralisées (C) se ramènent à trois catégories principales :

Première catégorie : $i = m$. — Dans ce cas, on a

$$\frac{S_0}{S_1} = k_1 + \frac{x^{m-1}}{\lambda_2} + \frac{x^{m-1}}{\lambda_3} + \frac{x^{m-1}}{\lambda_4} + \dots,$$

avec

$$k_n = \alpha_n^m x^{nm} + \alpha_n^{m-1} x^{(m-1)n} + \dots + \alpha_n^1 x + \alpha_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynômes entiers en x : si S_0 est de degré maximum k , S_n sera de degré maximum $k + mn$.

Deuxième catégorie : $i = 0$. — Dans ce cas, en posant $x = \frac{1}{z}$, il vient

$$\frac{S_0}{S_1} = k_1 + \frac{z^{m+1}}{\lambda_2} + \frac{z^{m+1}}{\lambda_3} + \frac{z^{m+1}}{\lambda_4} + \dots,$$

avec

$$\lambda_n = \beta_n^m z^m + \beta_n^{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_n^1 z + \beta_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en $z = \frac{1}{x}$;

$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ sont de même degré minimum en z .

Troisième catégorie. — Nous ferons rentrer dans cette catégorie les développements pour lesquels les numérateurs partiels sont tous égaux à l'unité; il sera nécessaire à cet effet de faire une distinction selon la parité de m .

a. m impair. — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h,$$

d'où

$$i = \frac{m+1}{2} + h = j + h,$$

et la forme devient, en divisant les deux membres par x^h .

$$(E) \quad \frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} + \dots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^i + \beta_n x^{i-1} + \dots + \mu_n x^{2-j} + \gamma_n x^{1-j}.$$

b. m pair. — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h - 1,$$

d'où

$$i = \frac{m}{2} + h = j + h.$$

Par suite, en divisant les deux membres par x^h ,

$$\frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} + \dots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \dots + \mu_n x^{1-j} + \gamma_n x^{-j}.$$

En posant $x = y^2$, on pourra multiplier les deux membres par y et il

viendra

$$(J) \quad \frac{S_0}{y^{2k-1}S_1} = \lambda_1 y + \frac{1}{\lambda_2 y} + \frac{1}{\lambda_3 y} + \frac{1}{\lambda_4 y} + \dots,$$

avec

$$\lambda_n y = z_n y^{2J-1} + \beta_n y^{2J-1} + \dots + \mu_n y^{2J-2} + \gamma_n y^{1-2J}.$$

6. Nous aurions pu diriger nos opérations de manière à réduire à l'unité tous les dénominateurs partiels. Considérons, comme précédemment, deux polynômes ou séries S_0 , S_1 et admettons qu'ils aient le même premier terme Ax^k :

$$S_0 = Ax^k + a_0^{k-1} x^{k-1} + a_0^{k-2} x^{k-2} + \dots,$$

$$S_1 = Ax^k + a_1^{k-1} x^{k-1} + a_1^{k-2} x^{k-2} + \dots$$

On aura évidemment

$$S_0 - S_1 = -(a_1^{k-1} - a_0^{k-1})x^{k-1} - (a_1^{k-2} - a_0^{k-2})x^{k-2} - \dots,$$

et l'on pourra écrire

$$S_0 = S_1 - \frac{z_1}{x} S_2, \quad z_1 = \frac{a_1^{k-1} - a_0^{k-1}}{A},$$

S_2 étant un polynôme ou série dont le premier terme sera Ax^k , comme S_0 et S_1 .

On aura de même

$$S_1 = S_2 - \frac{z_2}{x} S_3,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit la forme de développement déjà obtenue:

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 + \frac{z_1}{x} + \frac{z_2}{x^2} + \frac{z_3}{x^3} + \dots$$

Si les polynômes ou séries S_0 , S_1 ont leurs m premiers termes identiques, il est facile de reconnaître que l'on pourra déterminer le polynôme P_2 , tel que l'on ait

$$S_0 = S_1 - P_2 S_2,$$

S_2 commençant par les mêmes m premiers termes que S_0 et S_1 : il suffira, en effet, de diviser $S_0 - S_1$ par le polynôme π formé avec ces m premiers termes communs et d'arrêter au $m^{\text{ième}}$ terme le quotient P_2 qui sera ainsi de degré maximum $-m$ et de degré minimum $-(2m-1)$; on aura ainsi le développement

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 + \frac{P_2}{1} + \frac{P_3}{1} + \frac{P_4}{1} + \dots$$

De même considérons une série entière S_0 représentant, non plus un développement de Taylor, mais un développement de Laurent illimité dans les deux sens et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable

$$S_0 = \dots a_0^k x^k + \dots + a_0^1 x + a_0^0 + b_0^1 \frac{1}{x} + \dots + b_0^k \frac{1}{x^k} + \dots$$

Soit également

$$S_1 = \dots a_1^n x^n + \dots + a_1^1 x + a_1^0 + b_1^1 \frac{1}{x} + \dots + b_1^k \frac{1}{x^k} + \dots$$

Il est clair qu'en posant

$$\beta_1 a_1^0 = a_0^0,$$

on pourra écrire

$$S_0 = \beta_1 S_1 - S_2,$$

et dans S_2 on aura

$$a_2^0 = 0,$$

et, en général,

$$a_2^1 \neq 0, \quad b_2^1 \neq 0.$$

De même, en posant

$$S_1 = (z_2 x + \beta_2) S_2 - S_3,$$

on pourra déterminer z_2 et β_2 de manière à avoir dans S_3

$$a_3^0 = a_3^1 = 0.$$

Il suffira pour cela de satisfaire aux relations

$$a_1^0 = z_2 b_2^1, \quad a_1^1 = \beta_2 a_2^1.$$

De même, en posant

$$S_2 = \left(\beta_3 + \frac{\gamma_3}{x} \right) S_3 - S_1,$$

on pourra déterminer β_3 et γ_3 de manière à avoir, dans S_4 ,

$$a_4^1 = a_4^0 = b_4^1 = 0.$$

Il suffira d'écrire

$$a_2^1 = \gamma_3 a_3^2, \quad b_2^1 = \beta_3 b_3^1,$$

et ainsi de suite, les dénominateurs partiels étant alternativement de la forme

$$z_{2n}x + \beta_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_{2n+1} + \gamma_{2n+1} \frac{1}{x}.$$

En continuant de la sorte on voit que S_{2n} pourra s'écrire

$$S_{2n} = x^n P(x) + x^{-n} Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

$P(x)$ et $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ étant des séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes et toutes positives de la variable.

La connaissance des deux séries initiales S_0, S_1 permettra donc de déterminer une suite limitée ou illimitée

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots,$$

ce qui constitue une généralisation naturelle de la théorie des fractions continues.

D'une manière tout à fait générale on peut admettre que les séries ou polynômes S_0, S_1, S_2, \dots sont données au moyen d'une relation récurrente de la forme

$$z_{n-1} S_{n-1} = \beta_n S_n - \gamma_{n+1} S_{n+1},$$

dans laquelle les z_n, β_n, γ_n sont des fonctions connues en x et en n .

Il sera possible, dès lors, de mettre le rapport $\frac{S_0}{S_1}$ des deux termes initiaux sous la forme d'un développement en fraction continue.

Nous avons, en effet, la série de relations

$$S_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_0} S_1 - \frac{\gamma_2}{\alpha_0} S_2,$$

$$S_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_1} S_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_1} S_3,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_0} \cdot \frac{\gamma_2}{\frac{\beta_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{\gamma_3}{\frac{\alpha_1}{\frac{\beta_3}{\alpha_2}}} \cdot \frac{\gamma_4}{\frac{\alpha_2}{\frac{\beta_4}{\alpha_3}}} \cdot \dots,$$

et, par une réduction facile,

$$\frac{\alpha_0 S_0}{S_1} = \beta_1 \cdot \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2} \cdot \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3} \cdot \frac{\alpha_3 \gamma_4}{\beta_4} \cdot \dots,$$

qui constitue le développement le plus général.

On trouverait de même par les relations récurrentes ci-dessus

$$\frac{\gamma_{n+1} S_{n+1}}{S_n} = \beta_n \cdot \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_{n-1}} \cdot \frac{\alpha_{n-2} \gamma_{n-1}}{\beta_{n-2}} \cdot \frac{\alpha_{n-3} \gamma_{n-2}}{\beta_{n-3}} \cdot \dots$$

7. Le présent Mémoire est divisé en six Chapitres.

Dans le premier, nous avons établi les formules générales qui permettent d'exprimer un reste quelconque, S_n , en fonction de deux autres restes également quelconques.

Nous avons été amené à introduire des symboles Q_n^i qui sont les termes des fractions approchées ordinairement dénommées *réduites* et dont nous démontrons plusieurs propriétés générales. Nous établissons enfin une formule qui permet de grouper plusieurs numérateurs et dénominateurs partiels successifs.

Dans le deuxième Chapitre nous étudions les conditions de convergence d'une fraction continue selon le mode de croissance ou de décroissance pour $n = \infty$ de Q_n^0 ou de $\frac{S_0}{S_n}$; nous démontrons ensuite une proposition générale relative au domaine de convergence de la fraction continue où l'on voit apparaître, sous certaines restrictions, mais d'une manière élémentaire, la notion de coupure introduite par Hermite et par Stieltjes.

Dans le troisième Chapitre, nous étudions les fractions continues de la forme

$$Y_1 = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_4 + \dots}}}$$

ou

$$Y_2 = 1 + \frac{\mu_2}{1 + \frac{\mu_3}{1 + \frac{\mu_4}{1 + \dots}}}$$

dans lesquelles les λ_n, μ_n sont des polynomes entiers en x et $\frac{1}{x}$ dont les coefficients diminuent au delà de toute limite pour $n = \infty$.

Dans le premier cas, on peut dire que la fraction continue représente les deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes

$$Y_1 = \frac{P_0 \pm iI_0}{P_1 \pm iI_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

et nous indiquons une limite supérieure de l'ordre apparent et, par conséquent, du genre des fonctions entières ou quasi-entières P_0, P_1, I_0, I_1 aux points essentiels 0 et ∞ .

Dans le second cas, Y_2 représente une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure qui se détermine comme dans le cas précédent.

Dans le quatrième Chapitre, nous démontrons tout d'abord que la fraction périodique simple

$$Y = \lambda + \frac{\mu}{\lambda + \frac{\mu}{\lambda + \dots}}$$

est constamment égale à la racine de plus grand module de l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0.$$

Cette fraction est partout convergente, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles les deux racines ont même module et qui forment une véritable coupure : sur ces courbes on a $\frac{\lambda^2}{\mu} = t$, t étant un nombre réel quelconque compris entre 0 et + 4.

Si la fraction continue est de la forme

$$Y = \lambda_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \frac{\mu_4}{\lambda_4} + \dots,$$

λ_n, μ_n étant des polynômes entiers en x et $\frac{1}{x}$ dont les limites respectives pour $n = \infty$ sont λ et μ , deux cas sont à considérer :

a. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre réel quelconque, t , compris entre 0 et $+4$.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

a deux racines α, β , de même module.

On peut dire alors que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes aux points essentiels 0 et ∞ :

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \quad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}, \quad P_0 I_1 - I_0 P_1 = R_0.$$

L'ordre apparent de P_0, I_0, P_1, I_1, R_0 a une limite supérieure, en général facile à déterminer.

b. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre autre que t ou à une fraction rationnelle.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

possède deux racines α, β dont l'une, α par exemple, a, en général, un module supérieur à celui de l'autre. La fraction continue représente alors la fonction méromorphe ou quasi-méromorphe

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R_0$$

sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on a

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = t,$$

t étant un nombre réel quelconque compris entre 0 et $+4$.

de ces fonctions et de leurs relations entre elles que nous allons entreprendre en premier lieu.

9. Posons

$$(2) \quad a_i = \varphi_{i+n} P'_{i+n} a_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} a_{i+n+1}.$$

Nous avons, d'après (1), et cela quel que soit le signe de n .

$$\varphi_{i+n} a_{i+n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} a_{i+n+2},$$

d'où, en substituant dans (2),

$$a_i = (\lambda_{i+n+1} P'_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}) a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} P'_{i+n} a_{i+n+2}.$$

Or, par définition,

$$a_i = \varphi_{i+n+1} P'_{i+n+1} a_{i+n+1} + \mu_{i+n+2} Q'_{i+n+1} a_{i+n+2},$$

d'où il vient par comparaison

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_{i+n+1} P'_{i+n+1} = \lambda_{i+n+1} P'_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}, \\ Q'_{i+n+1} = - P'_{i+n}. \end{cases}$$

et il est clair que ces relations subsistent quel que soit le signe de n .

10. En remplaçant dans (2) P'_{i+n} par sa valeur $-Q^i_{i+n+1}$, tirée de (3), il vient

$$(4) \quad a_i = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} a_{i+n+1} - \varphi_{i+n+1} Q'_{i+n+1} a_{i+n+2},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(4') \quad a_i = \begin{vmatrix} Q'_{i+n} & \varphi_{i+n} a_{i+n} \\ Q'_{i+n+1} & \mu_{i+n+1} a_{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Nous avons par définition

$$a_i = \varphi_{i+1} P_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} Q'_{i+1} a_{i+2} = \frac{\lambda_{i+1}}{\varphi_i} a_{i+1} - \frac{\mu_{i+2}}{\varphi_i} a_{i+2},$$

d'où l'on tire

$$-Q_{i+2}^i = P_{i+1}^i = \frac{\lambda_{i+1}}{\rho_i \rho_{i+1}} = \frac{1}{\rho_{i+1}} (\lambda_{i+1} P_i^i + \mu_{i+1} Q_i^i),$$

$$Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\rho_i} = -P_i^i.$$

Il en résulte

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_i^i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i} (\lambda_i P_{i-1}^i + \mu_i Q_{i-1}^i), \\ Q_i^i = 0 = -P_{i-1}^i, \\ \text{d'où} \\ P_{i-1}^i = 0 = \frac{1}{\rho_{i-1}} (\lambda_{i-1} P_{i-2}^i + \mu_{i-1} Q_{i-2}^i), \\ Q_{i-1}^i = \frac{1}{\mu_i} = -P_{i-2}^i, \\ \text{et, par suite,} \\ P_{i-2}^i = -\frac{1}{\mu_i}, \quad Q_{i-2}^i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1} \mu_i}. \end{array} \right.$$

Ce sont des valeurs particulières des symboles P et Q qui nous seront utiles dans la suite.

11. La relation (3) nous donne par substitution

$$(6) \quad \rho_{i+n+1} Q_{i+n+2}^i = \lambda_{i+n+1} Q_{i+n+1}^i - \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i;$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice supérieur.

De même la relation (1)

$$\rho_{i+n} a_{i+n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} a_{i+n+2}$$

donne, si l'on exprime a_{i+n} , a_{i+n+1} et a_{i+n+2} en fonction de a_k et de a_{k+1} , et si l'on égale dans les deux membres les coefficients de a_{k+1} ,

$$(7) \quad \rho_{i+n} Q_k^{i+n} = \lambda_{i+n+1} Q_k^{i+n+1} - \mu_{i+n+2} Q_k^{i+n+2};$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice inférieur.

12. Les relations (6) et (7) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'une relation plus générale que nous allons établir.

La relation (4) donne, en effet, par le même procédé que celui employé pour obtenir la relation (7),

$$(8) \quad Q'_k = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} Q_k^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q'_{i+n+1} Q_k^{i+n},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(8') \quad Q'_k = \begin{vmatrix} Q'_{i+n} & \rho_{i+n} Q_k^{i+n} \\ Q'_{i+n+1} & \mu_{i+n+1} Q_k^{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + n + 1$ cette relation devient

$$Q'_{i+n+1} = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} Q_{i+n+1}^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q'_{i+n+1} Q_{i+n+1}^{i+n},$$

et, en observant que, d'après (5),

$$Q_{i+n+1}^{i+n+1} = \frac{\lambda_{i+n}}{\mu_{i+n} \mu_{i+n+1}}, \quad Q_{i+n+1}^{i+n} = \frac{1}{\mu_{i+n}},$$

on obtient

$$\mu_{i+n} Q'_{i+n+1} = \lambda_{i+n} Q'_{i+n} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i;$$

c'est la relation (6).

De même, si dans (8) on fait $n = -2$, il vient

$$Q'_k = \mu_{i-1} Q'_{i-2} Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q'_{i-1} Q_k^{i-2},$$

et, en remplaçant Q'_{i-2} , Q'_{i-1} par leurs valeurs tirées de (5),

$$\mu_i Q'_k = \lambda_{i-1} Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q_k^{i-2};$$

c'est la relation (7).

13. Si, dans la relation (8), on fait $k = i$, il vient

$$Q'_i = 0 = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} Q_i^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q'_{i+n+1} Q_i^{i+n},$$

d'où, en supposant

$$\rho_{i+n} Q'_{i+n} Q'_{i+n+1} \neq 0,$$

$$\frac{Q^{i+n}_i}{Q^{i+n}_{i+n}} = \frac{\rho_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} \frac{Q^{i+n+1}_i}{Q^{i+n+1}_{i+n+1}}.$$

On aura donc successivement, en supposant $n > 0$,

$$\frac{Q^{i+n-1}_i}{Q^{i+n-1}_{i+n-1}} = \frac{\rho_{i+n}}{\rho_{i+n-1}} \frac{Q^{i+n}_i}{Q^{i+n}_{i+n}},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{Q^{i+1}_i}{Q^{i+1}_{i+1}} = \frac{\rho_{i+2}}{\rho_{i+1}} \frac{Q^{i+2}_i}{Q^{i+2}_{i+2}},$$

$$1 = - \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \frac{Q^{i+1}_i}{Q^{i+1}_{i+1}},$$

d'après (5), d'où, en multipliant membre à membre,

$$Q'_{i+n+1} = - \prod_{j=i}^{j=i+n} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} Q^{i+n+1}_i.$$

Posons pour simplifier

$$\prod_{j=i}^{j=i+k} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} = M^{i+k+1}_i, \quad k > 0;$$

nous obtiendrons la formule fondamentale de réciprocity des indices

$$Q'_{i+k} = - M^{i+k}_i Q^{i+k}_i, \quad k > 0;$$

avec $k < 0$, nous aurions

$$Q^{i-k}_i = - M^{i-k}_{i-k} Q'_{i-k},$$

d'où

$$Q^{i-k}_i = - \frac{1}{M^{i-k}_{i-k}} Q^{i-k}_i.$$

Il suffira donc de poser

$$M^{i-k}_i = \frac{1}{M^{i-k}_{i-k}} \quad \text{ou} \quad M^{i-k}_i M^{i-k}_{i-k} = 1$$

pour avoir la formule générale

$$(9) \quad Q_j^i = -M_i^j Q_i^j,$$

quel que soit j .

En particulier, pour $i = j$, comme $Q_i^i = 0$, M_i^i aurait une valeur indéterminée; nous verrons plus loin que l'on est amené à écrire l'égalité conventionnelle $M_i^i = 1$.

Nous avons admis au début de la démonstration

$$\varphi_{i+n} Q_{i+n}^i Q_{i+n+1}^i \neq 0.$$

Si l'on avait $Q_{i+n}^i = 0$, la relation (8) donnerait

$$\varphi_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_i^{i+n} = 0.$$

Or on ne peut avoir simultanément

$$Q_{i+n}^i = 0, \quad Q_{i+n+1}^i = 0,$$

car (8) donnerait, quel que soit k , $Q_k^i = 0$, ce qui est en contradiction avec $Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\varphi_i}$; il faut donc, si les φ_i sont supposés tous ni nuls ni infinis ⁽¹⁾, que l'on ait $Q_i^{i+n} = 0$, ce qui prouve bien la généralité de la formule (9).

14. Revenons à la formule (4)

$$a_i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i a_{i+n+1} - \varphi_{i+n} Q_{i+n+1}^i a_{i+n}.$$

D'après (9) nous avons

$$Q_{i+n}^i = -M_i^{i+n} Q_i^{i+n}, \quad Q_{i+n+1}^i = -M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1},$$

⁽¹⁾ Nous supposons cette condition remplie, sinon il existerait une relation linéaire entre deux a_i consécutifs et, par suite, tous les a_i s'exprimeraient linéairement en fonction de l'un d'entre eux, hypothèse qui doit être écartée *a priori*, sauf le cas où la fraction continue est limitée.

d'où, en substituant,

$$\frac{a_i}{\varphi_{i+n}} = - \frac{\mu_{i+n+1}}{\varphi_{i+n}} M_i^{i+n} Q_i^{i+n} a_{i+n+1} + M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1} a_{i+n};$$

mais il est aisé de vérifier que l'on a, quel que soit le signe de n ,

$$\frac{\mu_{i+n+1}}{\varphi_{i+n}} M_i^{i+n} = M_{i+n}^{i+n+1} M_i^{i+n} = M_i^{i+n+1}$$

et, plus généralement, quels que soient i, j, k ,

$$M_i^j M_j^k = M_i^k$$

avec l'égalité conventionnelle $M_i^i = 1$.

Il viendra donc, en substituant,

$$(10) \quad \frac{a_i}{\varphi_{i+n}} = M_i^{i+n+1} (Q_i^{i+n+1} a_{i+n} - Q_i^{i+n} a_{i+n+1}),$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(10') \quad a_i = \varphi_j M_i^{j+1} \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix}.$$

Cette formule peut également s'écrire

$$(10'') \quad a_i = \mu_{j+1} M_i^j \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

d'où, par le procédé déjà employé pour obtenir la relation (7),

$$(11) \quad \frac{Q_k^i}{\varphi_j M_i^{j+1}} = \frac{Q_k^i}{\mu_{j+1} M_i^j} = \begin{vmatrix} Q_k^j & Q_k^{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

et, si $k = i + 1$, on aura, puisque $Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\varphi_i}$,

$$(12) \quad Q_i^j Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1} Q_i^j = \frac{1}{\varphi_i \varphi_j M_i^{j+1}} = \frac{M_{j+1}^{j+1}}{\varphi_i \varphi_j} = \frac{M_{j+1}^{j+1}}{\mu_{j+1} \mu_{j+1}},$$

et ces relations sont absolument générales.

13. Si dans le second membre de (11) nous multiplions la première colonne par $-a_{j+i}$ et la seconde par a_j , il viendra, en ajoutant les colonnes ainsi multipliées et en tenant compte des relations

$$a_k = \rho_j M_k^{j+1} (Q_k^{j+1} a_j - Q_k^j a_{j+1}),$$

$$a_i = \rho_j M_i^{j+1} (Q_i^{j+1} a_j - Q_i^j a_{j+1}),$$

$$Q_k^j a_j = \rho_j M_i^{j+1} \begin{vmatrix} Q_k^j & \frac{a_k}{\rho_j M_k^{j+1}} \\ Q_i^j & \frac{a_i}{\rho_j M_i^{j+1}} \end{vmatrix}$$

et, en réduisant,

$$(13) \quad Q_k^j a_j = Q_k^j a_i - M_i^k Q_i^j a_k$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(13') \quad M_i^k Q_i^j a_k = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ Q_i^k & Q_i^j \end{vmatrix},$$

et, par le procédé déjà employé,

$$(14) \quad M_i^k Q_i^j Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_i^j & Q_i^k \\ Q_i^k & Q_i^j \end{vmatrix}.$$

Telle est la relation la plus générale que nous voulions établir.

En particulier, la relation (13) montre que, si a_i et a_k ont un diviseur commun λ , celui-ci divisera également $Q_i^j a_j$; or, s'il ne divisait pas Q_i^k , il diviserait nécessairement a_j (j quelconque); si donc on admet que les a_j ont été débarrassés de leur plus grand commun diviseur, il reste démontré cette proposition fondamentale que le plus grand commun diviseur de a_i et de a_k divise Q_i^k .

16. Considérons les relations (1); la formule récurrente

$$\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+i} - \frac{\lambda_{i+2} a_{i+2}}{a_{i+1}} = \lambda_{i+i} - \frac{\rho_{i+1} \lambda_{i+2}}{\frac{\rho_{i+1} a_{i+2}}{a_{i+1}}}$$

permet d'écrire le rapport $\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}$ sous la forme d'un développement en fraction continue :

$$(15) \quad \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\rho_{i+1} \mu_{i+2}}{\lambda_{i+2}} - \frac{\rho_{i+2} \mu_{i+3}}{\lambda_{i+3}} - \dots - \frac{\rho_{i+n-2} \mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-1}} - \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}.$$

Réciproquement, la relation récurrente

$$\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2} a_{i+n-2}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2} \mu_{i+n-1}}{\frac{\mu_{i+n-1} a_{i+n-1}}{a_{i+n-2}}}$$

permet d'écrire

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} &= \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2} \mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-2}} \\ &\quad - \frac{\rho_{i+n-3} \mu_{i+n-2}}{\lambda_{i+n-3}} - \dots - \frac{\rho_{i+1} \mu_{i+2}}{\lambda_{i+1}} - \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}. \end{aligned} \right.$$

En particulier, admettons que tous les ρ_i et les μ_i soient égaux à l'unité, on aura

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{1}{\lambda_{i+2}} - \frac{1}{\lambda_{i+3}} - \dots - \frac{1}{\lambda_{i+n-1}} - \frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$$

et

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{1}{\lambda_{i+n-2}} - \frac{1}{\lambda_{i+n-3}} - \dots - \frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

ce qui constitue un théorème fondamental sur la réversibilité des restes, bien connu dans la théorie des fractions continues arithmétiques.

Admettons que, dans (15), a_{i+n} soit le premier reste nul rencontré; on aura d'après (4)

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_{i+n} Q'_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} a_{i+n-1}, \\ a_{i+1} &= \mu_{i+n} Q^{i+1}_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^{i+1}_{i+n} a_{i+n-1}; \end{aligned}$$

d'où en divisant, puisque $a_{i+n-1} \neq 0$,

$$(17) \quad \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{Q'_{i+n}}{Q^{i+1}_{i+n}}.$$

Cette relation aurait pu, d'ailleurs, se démontrer directement, car la formule récurrente (7)

$$\rho_i Q_{i+n}^i = \lambda_{i+1} Q_{i+n}^{i+1} - \mu_{i+2} Q_{i+n}^{i+2}$$

donne, pour $\rho_i \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}}$, le même développement *limité* que pour $\rho_i \frac{a_i}{a_{i+1}}$.

De même admettons que, dans (16), a_i soit le premier reste nul rencontré; on trouvera comme précédemment, d'après (4),

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \frac{Q_i^{i+n}}{Q_i^{i+n-1}}.$$

Or

$$Q_{i+n}^i = -M_i^{i+n} Q_i^{i+n}, \quad Q_{i+n+1}^i = -M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1};$$

d'où, en substituant,

$$(18) \quad \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}}.$$

Cette relation aurait pu d'ailleurs se démontrer directement, car la formule récurrente (6)

$$\rho_{i+n-1} Q_{i+n}^i = \lambda_{i+n-1} Q_{i+n-1}^i - \mu_{i+n-1} Q_{i+n-2}^i$$

conduit, pour $\rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}}$, au même développement *limité* que pour $\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Les relations (4) rappelées ci-dessus donnent par division

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^i a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q_{i+n}^i a_{i+n-1}}{\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^{i+1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q_{i+n}^{i+1} a_{i+n-1}}$$

et, par suite,

$$(19) \quad \left\{ \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{Q_{i+n-1}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}} \right) \left(\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} - \rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}} \right) = \frac{M_{i+1}^{i+n-1}}{\rho_i (Q_{i+n-1}^{i+1})^2} \right. \\ \left. = - \frac{1}{\rho_i (Q_{i+n-1}^{i+1} Q_{i+1}^{i+n-1})} \right\}$$

ce qui constitue une relation directe entre les deux rapports $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ et $\frac{p_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Enfin, la relation (13) donne, en supposant

$$i < j < k < l < m < \dots < s < t < u,$$

$$Q_k^j a_i = Q_h^i a_j + M_t^h Q_t^i a_k$$

ou

$$Q_h^i a_i = Q_h^i a_j - M_j^k Q_j^i a_k,$$

et, par suite,

$$(20) \quad \frac{Q_k^i a_i}{a_j} = Q_k^i - M_j^k Q_j^i \frac{a_k}{a_j} = Q_k^i - \frac{M_j^k Q_j^i Q_k^k}{Q_j^k \frac{a_j}{a_k}},$$

ce qui constitue le schéma d'un développement en fraction continue. On pourra donc écrire

$$Q_k^i \frac{a_i}{a_j} = Q_k^i - \frac{M_j^k Q_j^i Q_k^k}{Q_l^i - \frac{M_l^k Q_l^k Q_m^m}{Q_m^k - \frac{M_l^m Q_l^m Q_n^n}{Q_n^k - \frac{M_l^n Q_l^n Q_u^u}{Q_u^k - \frac{a_t}{a_u}}}},$$

ou, par une réduction facile,

$$\frac{1}{Q_j^i} \frac{a_i}{a_j} = \frac{Q_k^i}{Q_j^i Q_k^k} + \frac{\frac{1}{Q_l^i}}{\frac{Q_j^k}{Q_l^k} Q_l^k} + \frac{\frac{1}{Q_m^i}}{\frac{Q_j^k}{Q_m^k} Q_m^k} + \frac{\frac{1}{Q_n^i}}{\frac{Q_j^k}{Q_n^k} Q_n^k} + \dots + \frac{\frac{1}{Q_u^i}}{\frac{Q_j^k}{Q_u^k} Q_u^k} + \frac{1}{Q_l^i} \frac{a_t}{a_u}.$$

Mais les formules connues

$$\begin{aligned} \varphi_i(Q_{i+1}^i a_i) &= p_{i+1} (Q_i^i a_{i+1} - a_j), \\ a_t &= p_u (Q_{u-1}^i a_u - \varphi_{u-1} (Q_u^i a_{u-1})) \end{aligned}$$

permettent d'exprimer $\frac{a_i}{a_j}$ en fonction de $\frac{a_t}{a_{t+1}}$, de même que $\frac{a_t}{a_u}$ en fonction de $\frac{a_{u-1}}{a_u}$.

On obtiendra donc un développement exprimant $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ en fonction de $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et dans lequel, seuls, les termes intermédiaires $a_j, a_k, a_l, a_m, \dots, a_s, a_t$ auront été envisagés.

Cette formule sera très utile dans le cas où il existera une relation simple entre ces différents termes, car on pourra grouper, en quelque sorte, un certain nombre de fractions partielles successives dans le développement général de la fraction continue considérée.

17. Les formules établies précédemment vont nous permettre de démontrer un théorème de la théorie des nombres.

Considérons les formules récurrentes dans lesquelles nous supposons que les $\varphi_i, \lambda_i, \mu_i$ sont des entiers quelconques :

$$\begin{aligned}\varphi_i + Q_{i+n+1}^i &= \lambda_{i+n} Q_{i+n}^i - \mu_{i+n} Q_{i+n-1}^i, \\ \varphi_{i+i-1} Q_{i+n}^i &= \lambda_{i+n-1} Q_{i+n-1}^i - \mu_{i+n-1} Q_{i+n-2}^i, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{i+2} Q_{i+3}^i &= \lambda_{i+2} Q_{i+2}^i - \mu_{i+2} Q_{i+1}^i, \\ \varphi_{i+1} Q_{i+2}^i &= \lambda_{i+1} Q_{i+1}^i.\end{aligned}$$

Soient de même les relations

$$\begin{aligned}\varphi_k + Q_{k+n+1}^{k+1} &= \lambda_{k+1} Q_{k+n+1}^{k+1} - \mu_{k+2} Q_{k+n+1}^{k+2}, \\ \varphi_{k+1} Q_{k+n+1}^{k+1} &= \lambda_{k+2} Q_{k+n+1}^{k+2} - \mu_{k+3} Q_{k+n+1}^{k+3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{k+n-2} Q_{k+n+1}^{k+n-2} &= \lambda_{k+n-1} Q_{k+n+1}^{k+n-1} - \mu_{k+n} Q_{k+n+1}^{k+n}, \\ \varphi_{k+n-1} Q_{k+n+1}^{k+n-1} &= \lambda_{k+n} Q_{k+n+1}^{k+n}.\end{aligned}$$

Si nous avons les égalités

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \beta_{\bar{x}} & \text{avec} & & \alpha + \beta &= i + n + k &= \sigma + 1, \\ \lambda_{x'} &= \lambda_{\bar{x}'} & \text{avec} & & \alpha' + \beta' &= i + n + k + 1 &= \sigma, \\ \mu_{x''} &= \mu_{\bar{x}''} & \text{avec} & & \alpha'' + \beta'' &= i + n + k + 2 &= \sigma + 1,\end{aligned}$$

il est clair que l'on aura

$$\frac{Q'_{i+n+1}}{Q'_{i+1}} = \frac{Q^k_{k+n+1}}{Q^{k+n}_{k+n+1}}$$

ou

$$\varphi_i(Q'_{i+n+1}) = \varphi_{k+n}(Q^k_{k+n+1}),$$

ou, plus simplement,

$$Q'_{i+n+1} = Q^{k+n}_{k+n+1},$$

puisque, par hypothèse,

$$\varphi_i = \varphi_{k+n}.$$

Plus généralement, on verrait que

$$Q^y_{\delta} = Q^y_{\delta'}$$

si

$$\gamma + \delta' = \gamma' + \delta = i + n + k + 1 = \sigma.$$

En particulier, la formule (8) deviendra

$$Q'_{i+2n+1} = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} Q^{i+n+1}_{i+2n+1} - \varphi_{i+n} Q'_{i+n+1} Q^{i+n}_{i+2n+1},$$

et, si dans les relations précédentes on suppose

$$k = i + n,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n + 1,$$

on aura

$$Q'_{i+n} = Q^{i+n+1}_{i+2n+1}, \quad Q'_{i+n+1} = Q^{i+n}_{i+2n+1}$$

et, par suite,

$$Q'_{i-2n+1} = \mu_{i+n+1} (Q'_{i+n})^2 - \varphi_{i+n} (Q'_{i+n+1})^2.$$

En reproduisant le raisonnement indiqué par Serret dans son article du Tome 13 du *Journal de Liouville*, on arrivera à démontrer que tout diviseur d'un nombre de la forme $a^2 - \varphi b^2$ est, sous certaines restrictions, également de cette forme.

La formule (8) peut s'écrire également

$$Q'_{i+2n} = \mu_{i+n+1} Q'_{i+n} Q^{i+n+1}_{i+2n} - \varphi_{i+n} Q'_{i+n+1} Q^{i+n}_{i+2n}.$$

Si dans les relations ci-dessus on suppose

$$k = i + n - 1,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n,$$

on aura

$$Q_{i+n}^i = Q_{i+2n}^{i+n}, \quad Q_{i+2n}^{i+n+1} = Q_{i+n-1}^i,$$

d'où

$$Q_{i+2n}^i = Q_{i+n}^i (\mu_{i+n+1} Q_{i+n-1}^i - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i);$$

d'où cette conséquence que Q_{i+n}^i est un diviseur de Q_{i+2n}^i .

CHAPITRE II.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE CONVERGENCE.

18. Nous allons examiner en détail le cas où le reste a_n ne devient jamais identiquement nul et nous étudierons les conditions de convergence de la fraction continue illimitée ainsi obtenue.

Dans un paragraphe précédent nous avons établi la formule (17) qui, pour $i = 0$, devient

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{Q_n^0}{Q_n^1} \quad \text{avec} \quad a_n = 0 \quad (n \text{ fini}).$$

Nous allons chercher tout d'abord si cette relation subsiste lorsque, la fraction continue étant illimitée, a_n tend vers zéro pour $n = \infty$; il nous faut pour cela déterminer les conditions de convergence de la fraction $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ ou réduite pour $n = \infty$.

La relation (12) nous donne

$$Q_{n-1}^n Q_n^1 - Q_n^0 Q_{n-1}^1 = \frac{M_{-1}^{n-1}}{\rho_0 \rho_{n-1}} = \frac{M_n^n}{\rho_1 \rho_n},$$

d'où, en divisant par $Q_{n-1}^1 Q_n^1$,

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n-1}^0}{Q_{n-1}^1} - \frac{Q_n^0}{Q_n^1} &= \frac{M_1^{n-1}}{\rho_0 \rho_{n-1} Q_{n-1}^1 Q_n^1}, \\ \frac{Q_{n-2}^0}{Q_{n-2}^1} - \frac{Q_{n-1}^0}{Q_{n-1}^1} &= \frac{M_1^{n-2}}{\rho_0 \rho_{n-2} Q_{n-2}^1 Q_{n-1}^1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{Q_2^0}{Q_2^1} - \frac{Q_3^0}{Q_3^1} &= \frac{M_1^2}{\rho_0 \rho_2 Q_2^1 Q_3^1}, \\ \frac{Q_1^0}{Q_1^1} &= \frac{\lambda_1}{\rho_0}, \end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces égalités,

$$(21) \quad -\rho_0 \frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \lambda_1 + \frac{M_1^2}{\rho_2 Q_2^1 Q_3^1} + \frac{M_1^3}{\rho_3 Q_3^1 Q_4^1} + \dots + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2} Q_{n-2}^1 Q_{n-1}^1} + \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1} Q_{n-1}^1 Q_n^1}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, le polynôme du second membre devient une série et, d'après un théorème bien connu de Cauchy, cette série sera convergente si la limite supérieure, pour $n = \infty$, de

$$\sqrt[n]{\frac{|M_1^n|}{|\rho_n Q_n^1 Q_{n+1}^1|}}$$

est inférieure à l'unité.

En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, m^{-2} étant la limite supérieure de $\left| \frac{M_1^n}{\rho_{n-1}} \right|$ pour $n = \infty$, nous avons l'inégalité

$$\lim. \inf. \sqrt[n]{|Q_n^1|} > \overline{m}.$$

C'est là un résultat simple dont on pourra souvent faire usage.

Il est, d'ailleurs, possible de généraliser cette condition, car la relation (11) donne

$$Q_{n-1}^0 Q_{n+k+l}^1 - Q_{n-1}^1 Q_{n+k+l}^0 = \frac{M_1^{n+k+l}}{\rho_0} Q_{n-1}^0 Q_{n+k+l}^1,$$

d'où

$$\frac{Q_{n-1}^0 Q_{n+k+l}^1}{Q_{n-1}^1 Q_{n+k+l}^0} - \frac{Q_{n+k+l}^0}{Q_{n+k+l}^1} = \frac{M_1^{n+k+l} Q_{n-1}^0 Q_{n+k+l}^1}{\rho_0 Q_{n-1}^1 Q_{n+k+l}^0 Q_{n+k+l}^1}.$$

et l'on voit aisément que la série représentative de $\frac{Q_{nk+i}^n}{Q_{nk+i}^1}$ pour $n = \infty$ sera convergente si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{|M_1^{nk+i} Q_{n-1}^{nk+i} Q_{nk+i}^{nk+i}|}{|z_0 Q_{n-1}^{nk+i} Q_{nk+i}^{nk+i}|}}$ est inférieure à l'unité. En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, pour $n = \infty$, la limite inférieure de $\sqrt[nk]{Q_{nk+i}^{nk+i}}$ est supérieure à \overline{m} .

Il est clair, d'ailleurs, que dans ce cas nous aurons seulement démontré la convergence de $\frac{Q_{nk+i}^n}{Q_{nk+i}^1}$ pour $n = \infty$; la limite de $\frac{Q_{nk+i}^n}{Q_{nk+i}^1}$ avec $j \not\equiv i \pmod{k}$ pourra ne pas exister ou avoir une valeur différente de celle trouvée précédemment.

Mais, même dans le cas où $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aurait, pour $n = \infty$, une limite unique et bien déterminée, celle-ci ne serait pas nécessairement égale à $\frac{a_0}{a_1}$, comme une généralisation hâtive de la formule (17) permettrait de le supposer. En effet, la relation (10) donne

$$a_0 Q_n^1 - a_1 Q_n^0 = \frac{1}{z_0} M_1^n a_n,$$

d'où

$$(22) \quad \frac{a_0}{a_1} - \frac{Q_n^1}{Q_n^1} = \Delta_n = \frac{1}{z_0} \frac{M_1^n a_n}{a_1 Q_n^1} = - \frac{a_n}{z_0 a_1 Q_n^1}$$

et l'on voit immédiatement que Δ_n ne tend vers zéro que si a_n est infiniment petit par rapport à Q_n^1 . Or nous savons que $\frac{a_0}{a_1}$ et $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ (pour $n = \infty$) ont le même développement *illimité* en fraction continue; nous avons donc ici un premier exemple de deux quantités pouvant différer entre elles et donnant cependant naissance au même développement illimité; ce fait ne doit, d'ailleurs, pas nous surprendre, car les deux racines (x' , x''), en principe différentes, de l'équation du second degré $x^2 - ax + b = 0$ donnent évidemment naissance au même développement

$$(x', x'') = a + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \dots$$

Quoi qu'il en soit, si, en outre de la condition ci-dessus admise

$$\lim. \inf. \sqrt[n]{|\overline{Q_n^1}|} > \overline{m},$$

nous avons également

$$\lim. \inf. \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{Q_n} \right|} > \overline{m},$$

il est clair que nous aurons $\lim \Delta_n = 0$ et $\frac{a_0}{a_1} = \lim \frac{Q_n^0}{Q_n^1}$.

Au lieu de considérer le critère de convergence de Cauchy, nous aurions pu faire intervenir celui de d'Alembert relatif au quotient de deux termes successifs : soit

$$\frac{M_1^{k-1}}{\rho_{k-1} Q_{k-1}^1 Q_k^1} : \frac{M_1^k}{\rho_k Q_k^1 Q_{k+1}^1} = \frac{\rho_k Q_{k+1}^1}{\rho_k Q_{k-1}^1}.$$

Si la limite inférieure, pour $k = \infty$, du module de cette expression est supérieure à l'unité, il est clair que $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura une limite, mais celle-ci ne sera égale à $\frac{a_0}{a_1}$ que dans certaines conditions, par exemple si la limite supérieure de $\left| \frac{\rho_{k+1} Q_{k+1}^1}{\rho_{k-1} Q_{k-1}^1} \right|$, pour $k = \infty$, est inférieure à l'unité.

Posons, en effet, suivant que k est pair ou impair,

$$Q_x^0 = Q_1^0 = -\frac{1}{\rho_0} \quad \text{et} \quad a_x = a_1,$$

ou

$$Q_x^0 = Q_2^0 = -\frac{\lambda_1}{\rho_0 \rho_1} \quad \text{et} \quad a_x = a_2 \quad \text{avec} \quad |a_2| < \left| \frac{\rho_0 \rho_0}{\rho_2} \right|.$$

On aura, en vertu des hypothèses faites,

$$\begin{aligned} |Q_{k+1}^1| &> (1 + \varepsilon)^{\frac{k+1}{2} - x} \left| \frac{\rho_k}{\rho_k} \frac{\rho_{k-2}}{\rho_{k-2}} \frac{\rho_{k-4}}{\rho_{k-4}} \dots \frac{\rho_{x+1}}{\rho_{x+1}} Q_x^1 \right|, \\ |a_{k+1}| &< \frac{|a_x|}{(1 + \varepsilon)^{\frac{k+1}{2} - x} \left| \frac{\rho_{k+1}}{\rho_{k+1}} \frac{\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \dots \frac{\rho_{x+2}}{\rho_{x+2}} \right|}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1} \right| < \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{k+1 - 2x}} \left| \frac{a_x}{M_{x+1}^1 Q_x^1} \right|.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\left| \frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \left| \frac{\rho_0 a_1}{M_1^{k+1}} \right|.$$

Pour $\alpha = 2$, il vient également

$$\left| \frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k-1}} \left| \frac{\rho_0 \rho_1 a_2}{\lambda_1 M_2^{k+1}} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \left| \frac{\rho_0^2 a_0}{\lambda_1 M_1^{k+1}} \right|;$$

dans les deux cas on voit, d'après (22), que Δ_n tend vers zéro.

La formule (21) peut également s'écrire

$$-\rho_0 \frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1} Q_{n-1}^1 Q_n^1} + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2} Q_{n-2}^1 Q_{n-1}^1} + \dots + \frac{M_1^2}{\rho_2 Q_2^1 Q_3^1} + \lambda_1.$$

Le second membre devient une série, lorsque n augmente indéfiniment et en divisant par le premier terme tous les termes de cette série, on obtiendra comme terme général,

$$\frac{\rho_{n-1} Q_{n-1}^1 Q_n^1}{\rho_{n-k} M_{n-k}^{n-1} Q_{n-k}^1 Q_{n-k+1}^1}.$$

On pourra, comme précédemment, étudier les conditions de convergence de cette série S . En particulier, si \underline{m}^2 est la limite inférieure de $\left| \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \right|$, pour $n = \infty$, et si $\sqrt[n]{|Q_n^1|}$ tend régulièrement vers sa limite $|u|$, il est clair que la série S sera convergente si $|u| < \underline{m}$.

On arriverait à une conclusion analogue par la considération du critère de d'Alembert; le rapport de deux termes est ici égal à $\frac{\rho_k Q_{k+1}^1}{\rho_k Q_{k+1}^1}$, soit à l'inverse de celui trouvé précédemment: si, pour $k = \infty$, la limite inférieure du module de ce rapport est supérieure à l'unité, la série S sera évidemment convergente.

Dans ce cas, on pourra écrire

$$\lim \left(-\rho_0 \frac{Q_n^0}{Q_n^1} \right) = \lim \left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1} Q_{n-1}^1 Q_n^1} \right) \times S;$$

d'où

$$\lim \left(-Q_n^0 Q_{n-1}^1 \right) = S \times \lim \left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_n \rho_{n-1}} \right).$$

Or, nous avons

$$\lim(Q_{n-1}^0 Q_n^1 - Q_n^0 Q_{n-1}^1) = \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\varphi_0 \varphi_{n-1}}\right),$$

d'où, par soustraction,

$$\lim(Q_{n-1}^0 Q_n^1) = (1 - S) \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\varphi_0 \varphi_{n-1}}\right),$$

et, par suite,

$$\lim \frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{S}{S-1} \lim \frac{Q_{n-1}^0}{Q_{n-1}^1} \quad \text{ou} \quad \lim \frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^1} = \frac{S}{S-1} \lim \frac{Q_n^1}{Q_{n-1}^1};$$

d'où l'on tire

$$(23) \quad \lim \sqrt[n]{\frac{Q_n^0}{Q_n^1}} = \lim \sqrt[n]{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^1}} = \frac{S}{S-1}.$$

19. Dans le paragraphe 16, nous avons établi la formule

$$(18) \quad \mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{\alpha_n} = \varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \quad \text{avec} \quad a_1 = 0.$$

Nous allons également chercher si cette relation subsiste lorsque $\frac{\alpha_1}{\alpha_n}$ diminue indéfiniment pour $n = \infty$ et dans ce but nous allons étudier les conditions de convergence de $\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ pour $n = \infty$.

La relation (12) donne

$$Q_n^1 Q_{n+1}^2 - Q_{n+1}^1 Q_n^2 = \frac{M_2^n}{\varphi_1 \varphi_n},$$

d'où, en divisant par $Q_n^1 Q_n^2$,

$$\frac{Q_{n+1}^2}{Q_n^2} - \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{M_2^n}{\varphi_1 \varphi_n Q_n^1 Q_n^2},$$

et, par suite,

$$\frac{Q_{n+1}^2}{Q_n^2} - \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{M_2^n}{\varphi_2 \varphi_n Q_n^1 Q_n^2},$$

$$\frac{Q_{n+1}^{n-1}}{Q_n^{n-1}} - \frac{Q_{n+1}^{n-2}}{Q_n^{n-2}} = \frac{M_{n-1}^n}{\varphi_{n-2} \varphi_n Q_n^{n-2} Q_n^{n-1}},$$

$$\frac{Q_{n+1}^{n-1}}{Q_n^{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\varphi_n};$$

d'où, en additionnant,

$$(24) \quad -\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \lambda_n + \frac{M_{n-1}^n}{\varphi_{n-2} Q_{n-2}^n Q_{n-1}^n} + \dots + \frac{M_3^n}{\varphi_2 Q_2^1 Q_n^2} + \frac{M_2^n}{\varphi_1 Q_1^1 Q_n^2},$$

et nous pouvons, comme précédemment, rechercher les conditions de convergence de la série que le second membre devient pour $n = \infty$.

Nous aurons à considérer la limite supérieure pour k et n infinis de $\sqrt[k]{\frac{M_{n+1}^{n+k}}{\varphi_n Q_{n+k}^n Q_{n+1}^{n+1}}}$; si cette limite est inférieure à l'unité, la série sera convergente et $\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura une limite; mais cette limite ne sera pas nécessairement égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, comme une généralisation hâtive de la formule (18) permettrait de le supposer: nous avons, en effet, d'après (4),

$$a_1 = \mu_{n+1} Q_n^1 a_{n+1} - \varphi_n Q_{n+1}^1 a_n,$$

d'où

$$(25) \quad \mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \delta_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et δ_n ne tend vers zéro que si $\left| \frac{a_n Q_n^1}{a_1} \right|$ augmente indéfiniment avec n .

Or, nous savons que $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ ont, pour $n = \infty$, le même développement illimité en fraction continue; nous avons donc un nouvel exemple de deux quantités pouvant être différentes et donnant cependant naissance au même développement illimité.

Quoi qu'il en soit, la série (24) sera convergente si l'on a

$$\lim. \inf. (k = \infty) \sqrt[k]{|Q_{n+k}^n|} > \overline{m};$$

il en sera de même si le module du rapport d'un terme quelconque

$\frac{M_{k+1}^n}{\varphi_k Q_n^k Q_{n+1}^{k-1}}$ au suivant $\frac{M_k^n}{\varphi_{k-1} Q_n^{k-1} Q_n^k}$ soit $\left| \frac{\varphi_{k-1} Q_n^{k-1}}{\mu_{k+1} Q_n^{k+1}} \right| a$, pour $k = \infty$, une

limite inférieure supérieure à l'unité; le rapport $\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura, pour $n = \infty$, une limite, mais celle-ci ne sera égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ que

dans certaines conditions si, par exemple, le module de $\frac{a_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}$ a, pour $k = \infty$, une limite inférieure plus grande que l'unité, comme un calcul élémentaire permettrait de le démontrer.

La relation (24) peut également s'écrire

$$-\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2} + \frac{M_3^n}{\rho_2 Q_n^2 Q_n^3} + \dots + \frac{M_{n-1}^n}{\rho_{n-2} Q_n^{n-2} Q_n^{n-1}} + \lambda_n.$$

Le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\rho_{k+1} Q_n^{k+1}}{\rho_{k-1} Q_n^k}$, soit l'inverse de celui trouvé précédemment; si, pour $k = \infty$, le module de ce rapport a une limite inférieure plus grande que l'unité, le second membre sera, à la limite, égal au produit du premier terme par une série convergente S' . On aura donc

$$\lim \left(-\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \right) = S' \times \lim \left(\frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2} \right),$$

et, en tenant compte de

$$\lim (Q_n^1 Q_{n+1}^2 - Q_{n+1}^1 Q_n^2) = \lim \left(\frac{M_2^n}{\rho_1 \rho_n} \right),$$

il vient

$$\lim (-Q_{n+1}^1 Q_n^2) = S' \times \lim \left(\frac{M_2^n}{\rho_1 \rho_n} \right),$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}} = \lim \sqrt{\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^2}} = \frac{S'}{S-1},$$

relation tout à fait analogue à la formule (23).

Rappelons enfin la formule (20), qui résume en quelque sorte les résultats que nous venons d'obtenir :

$$\left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{Q_n^0}{Q_n^1} \right) \left(\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \right) = \Delta_n \delta_n = \frac{M_1^n}{\rho_n (Q_n^1)^2}.$$

Nous voyons immédiatement que, si

$$\liminf \sqrt[n]{|Q_n^1|} > \bar{m},$$

et admettons que le module de cette expression ait pour limite inférieure un nombre $\sigma > 1$; il est clair que le second membre sera dans ce cas le produit du premier terme par une série convergente Σ .

On aura donc, en chassant les dénominateurs,

$$\lim(\varphi_n M_1^{n+1} a_n Q_1^{n+1}) = \lim(-\varphi_n Q_1^{n+1} a_n) = a_1 \Sigma.$$

En retranchant de la relation (10), rappelée plus haut, il vient

$$\lim(\varphi_n M_1^{n+1} Q_1^n a_{n+1}) = \lim(-\mu_{n+1} Q_1^n a_{n+1}) = a_1(\Sigma - 1).$$

La formule (22) donne d'ailleurs

$$\Delta_{n+1} = \frac{M_1^{n+1} a_{n+1}}{\varphi_n a_1 Q_1^{n+1}};$$

d'où, en tenant compte de l'égalité ci-dessus,

$$\lim \Delta_{n+1} = \lim \left(-\frac{\varphi_n M_1^{n+1} a_{n+1}}{\varphi_n a_1 \Sigma} \right).$$

Or, de l'hypothèse

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} \right| < \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\varphi_{k-1}}{\mu_{k-1}} \right|,$$

on tire immédiatement

$$\left| \frac{a_n a_{n+1}}{a_0 a_1} \right| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \frac{\mu_1}{\varphi_n M_1^{n+1}} \right|;$$

d'où, en substituant,

$$\lim |\Delta_{n+1}| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \frac{\mu_1 a_0}{\varphi_n a_1 \Sigma} \right|,$$

ce qui prouve que, en général, sauf le cas exceptionnel où $\Sigma = 0$, la différence $|\Delta_{n+1}|$ décroît au moins aussi vite que le terme de rang n d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{\sigma} < 1$; donc Δ_n a pour limite zéro et $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a pour limite $\frac{a_n}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans ce même cas δ_n aura également une limite, mais en général $\neq 0$.

La formule (25) donne en effet

$$\hat{\varphi}_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$\lim \hat{\varphi}_n = \lim \frac{a_{n+1} Q_n^1}{(1-\Sigma) a_n Q_n^1} = \lim \frac{1}{1-\Sigma} \frac{a_{n+1}}{a_n};$$

d'où, en remplaçant $\hat{\varphi}_n$ par sa valeur,

$$\lim \varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{\Sigma}{\Sigma-1} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

ce qui démontre bien la propriété annoncée.

21. Admettons maintenant que le module de $\frac{\varphi_{k-1} a_{k-1}}{\varphi_{k+1} a_{k+1}}$ ait pour $k = \infty$ une limite inférieure supérieure à un nombre $\sigma > 2$.

Dans ces conditions, il est clair que le module de la série entre parenthèses (26) sera supérieur à

$$\left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right| \left(1 - \frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}} \right) = \frac{\sigma-2}{\sigma-1} \left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right|$$

et inférieur à

$$\left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right| \left(\frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}} \right) = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right|.$$

On aura donc

$$\frac{\sigma-2}{\sigma-1} \left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right| < \left| \frac{M_{n+1}^{n+1} Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}} \right| = \left| \frac{Q_{n+1}^1}{a_1 a_{n+1}} \right| < \frac{\sigma}{\sigma-1} \left| \frac{1}{\varphi_n a_n a_{n+1}} \right|,$$

d'où en chassant les dénominateurs

$$(27) \quad \frac{\sigma-2}{\sigma-1} |a_1| < |\varphi_n a_n Q_{n+1}^1| < \frac{\sigma}{\sigma-1} |a_1|.$$

D'ailleurs, en vertu de l'hypothèse admise

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\varphi_n a_n}{|\mu_{n+2}|} \right|,$$

d'où en multipliant

$$|a_{n+1} Q_{n+1}| < \frac{1}{\sigma-1} \left| \frac{a_1}{|\mu_{n+2}|} \right|.$$

Or nous avons

$$\Delta_n = \frac{M_1^n a_n}{\varphi_0 a_1 Q_1^n}, \quad \Delta_{n+1} = \frac{M_1^{n+1} a_n}{\varphi_0 a_1 Q_{n+1}^1},$$

d'où

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{\varphi_n a_n Q_{n+1}^1}{|\mu_{n+1}| a_{n+1} Q_1^n},$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$(28) \quad \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \right| > \sigma - 2;$$

c'est là une propriété caractéristique de l'approximation obtenue avec les réduites successives.

Il existe deux cas généraux dans lesquels la condition ci-dessus

$$\lim. \inf. \left| \frac{\varphi_{k-1} a_{k-1}}{|\mu_{k+1}| a_{k+1}} \right| > \sigma > 2$$

se trouve réalisée.

En premier lieu, si l'on réduit selon le procédé ordinaire un nombre incommensurable en fraction continue en posant $\varphi_n = \mu_n = 1$ et en prenant pour λ_n l'entier réel ou complexe le plus rapproché de la fraction $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on aura ⁽¹⁾ :

$$\sigma > 5 \quad \text{dans le domaine réel,}$$

$$\sigma > 3 \quad \text{dans le domaine complexe.}$$

Dès lors, dans ce cas, les réduites ont toujours une limite précisément égale au nombre incommensurable donné.

En second lieu, si l'on considère une fraction continue de la forme

(1) Voir Arue, Note précitée, p. 399 et 436.

normale (C) (§ 5), les restes successifs a_k ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable auront leur degré maximum qui ira constamment en diminuant. Si, par exemple, a_{k-1} est de degré maximum δ , a_{k+1} sera de degré $\delta - 2i$ et, comme $\varphi_k = 1$, $\mu_k = x^{2i-m-1}$, il en résulte que le rapport $\frac{\varphi_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}$ sera, en général, de degré $m + 1 (m \geq 0)$. On pourra donc déterminer une valeur de la variable x , soit x_0 , telle que, pour $|x| > |x_0|$, le rapport ci-dessus ait un module supérieur à un nombre positif quelconque fixé d'avance.

Dès lors la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura, pour $n = \infty$, une limite égale à $\frac{a_0}{a_1}$; en d'autres termes, la fraction continue (C) est, en général, toujours convergente pour $|x|$ suffisamment grand.

La conclusion précédente tombe en défaut lorsque le module de a_n tend vers zéro; nous verrons, en effet, que dans ce cas la fraction continue possède, sur tout le plan complexe, deux déterminations dont nous donnerons l'expression algébrique.

22. Considérons la formule (26); on peut l'écrire

$$\frac{Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}} = \frac{1}{\mu_2 a_1 a_2} + \frac{1}{M_1^2 \varphi_2 a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{M_1^{n+1} \varphi_n a_n a_{n+1}}.$$

Pour étudier les conditions de convergence de la série que devient le second membre pour $n = \infty$, nous aurons à considérer la limite inférieure de $\sqrt[n]{M_1^{n+1} \varphi_n a_n a_{n+1}}$ et la série sera convergente si cette limite est > 1 .

En particulier, cette condition sera remplie si l'on a

$$\liminf. \sqrt[n]{a_n} > \frac{1}{m}.$$

De même le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\varphi_{k+1} a_{k+1}}$, c'est-à-dire l'inverse de celui considéré précédemment; si le module de ce rapport a une limite inférieure > 1 , il est clair que le second membre sera une série convergente Σ' . On aura donc

$$\lim(Q_1^{n+1}) = a_1 \Sigma' \lim(a_{n+1}).$$

Or,

$$\Delta_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{\rho_0 a_1 Q_1^{n+1}},$$

d'où en substituant

$$\lim \Delta_{n+1} = -\frac{1}{\rho_0 a_1^2 \Sigma^j}.$$

Il en résulte immédiatement que la limite de Δ_{n+1} est, en général, $\neq 0$, et, par conséquent, que la limite de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans cette même hypothèse δ_n tend vers zéro.

Nous avons, en effet,

$$\lim \delta_n = \lim \frac{a_1}{a_n Q_n^1} \frac{Q_1^{n+1}}{a_1 \Sigma^j a_{n+1}} = \lim \left(-\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1} \Sigma^j} \right).$$

En vertu de l'hypothèse admise nous avons

$$\left| \frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1}} \right| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \frac{\delta_n}{\rho_0 a_0 a_1} \right|, \quad \sigma > 1,$$

d'où

$$\lim |\delta_n| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{\rho_0 a_0 a_1 \Sigma^j} \right|,$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

Nous allons résumer sommairement les résultats ci-dessus :

$$(A) \quad \lim. \sup. \left| \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}} \right| < 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, égale à $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement différente de celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$(B) \quad \lim. \inf. \left| \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}} \right| > 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\varphi_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement égale à celle de $\varphi_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Il en résulte que la fraction continue $\left(\frac{a_0}{a_1}\right)$ ou la fraction continue renversée $\left(\frac{\varphi_{n+1} a_{n+1}}{a_n}\right)$ est, en général, susceptible de deux déterminations distinctes.

(C) Dans les cas intermédiaires, les séries considérées ci-dessus deviennent, en général, divergentes et l'étude de la fraction continue devra être faite au moyen des méthodes développées dans les Chapitres suivants.

Nous pouvons toutefois obtenir un résultat intéressant dans le cas où le rapport $\frac{\varphi_{k+1} a_{k+1}}{\varphi_{k-1} a_{k-1}}$ tend régulièrement pour $k = \infty$ vers sa limite $e^{2\theta i}$, si, en outre, l'on admet que $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ tend régulièrement vers sa limite.

Posons, en effet,

$$\lim \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_{k-1}} = m^2,$$

d'où

$$\lim \frac{a_{k-1}}{a_k} = m e^{-\theta i}.$$

Or, la relation

$$\varphi_{k-1} a_{k-1} = \lambda_k a_k - \varphi_{k+1} a_{k+1}$$

donne

$$\lambda_k = \frac{\varphi_{k-1} a_{k-1}}{a_k} + \frac{\varphi_{k+1} a_{k+1}}{a_k},$$

et, par suite,

$$\lim \lambda_k = m \varphi_{k-1} (e^{-\theta i} + e^{\theta i}) = 2 \sqrt{\varphi_{k+1} \varphi_{k-1}} \cos \theta.$$

Nous voyons donc que, dans ces conditions, le rapport $\frac{\lambda_k}{\sqrt{\varphi_{k-1} \varphi_{k+1}}}$ a pour limite, pour $k = \infty$, un nombre réel compris entre -2 et $+2$.

25. Nous pouvons, dans un cas particulier, établir une proposition qui est, en quelque sorte, la réciproque de la précédente.

Considérons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0,$$

dans laquelle nous avons posé

$$\rho_n = \mu_n = 1.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = \lambda_n - \frac{1}{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}}.$$

Admettons que l'on ait

$$|\lambda_n| > 2(1 + \varepsilon), \quad \left| \frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} \right| > 1 + \varepsilon,$$

on en conclura immédiatement

$$\left| \frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} \right| > 1 + \varepsilon.$$

Or, nous avons

$$\left| \frac{Q_2^0}{Q_1^0} \right| = |\lambda_1| > 2(1 + \varepsilon).$$

La proposition étant vraie pour $n = 1$ se trouve dès lors démontrée d'une manière générale.

Nous pouvons donc écrire

$$\liminf \sqrt[n]{|Q_n^0|} > 1 + \varepsilon,$$

et, en vertu des résultats établis au paragraphe 18, nous sommes assuré de la convergence de la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_1^0}$ pour $n = \infty$.

Posons maintenant

$$\lambda_n = a_n + ib_n, \quad \frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} = c_n + id_n.$$

Il viendra

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = c_{n+1} + id_{n+1} = a_n + ib_n - \frac{1}{c_n + id_n} = a_n + ib_n - \frac{c_n - id_n}{c_n^2 + d_n^2},$$

d'où

$$d_{n+1} = b_n + \frac{d_n}{c_n^2 + d_n^2}.$$

Il résulte de cette relation que, si tous les b_n ont le même signe et si d_n possède ce signe, il en sera de même de d_{n+1} et l'on aura, en outre,

$$|d_{n+1}| > |b_n|.$$

En posant

$$c_n^2 + d_n^2 = \tau_n^2,$$

nous aurons la formule

$$d_{n+1} = b_n + \frac{b_{n-1}}{\tau_n^2} + \frac{b_{n-2}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2} + \frac{b_{n-3}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2 \tau_{n-2}^2} + \dots$$

Je dis que, si la série $\Sigma |b_n|$ a une somme $S > 1$, il est impossible d'avoir

$$\lim. \sup. \tau_n \leq 1,$$

car on aurait évidemment

$$|d_{n+1}| \geq \Sigma |b_n| = S > 1,$$

et, par suite,

$$\tau_{n+1} > |d_{n+1}| > 1,$$

ce qui implique contradiction.

En admettant donc que τ_n tende régulièrement vers sa limite nous pourrions écrire

$$\lim. \inf. \sqrt[n]{|Q_n^g|} > 1,$$

et, dès lors, la convergence de $\frac{Q_n^g}{Q_1^g}$ pour $n = \infty$ est assurée sous les conditions énoncées précédemment.

En combinant les deux résultats que nous venons d'obtenir et en remarquant que les k premiers termes (k fini) d'une fraction continue sont sans influence sur la convergence de celle-ci, nous pouvons établir la proposition suivante :

Si dans une région du plan complexe les λ_n sont tels qu'ils satis-

fassent, pour $n > k$, à l'une des deux conditions suivantes :

$$(a) \quad |\lambda_n| > 2,$$

$$(b) \quad \lambda_n = \alpha_n + i\varepsilon_n \quad (\alpha_n \text{ réel}),$$

ε_n pouvant être très petit, mais ayant un signe constant avec $|\Sigma \varepsilon_n| > 1$, la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ sera convergente dans cette région.

Par conséquent, si λ_n tend régulièrement vers sa limite, il est aisé d'en conclure que la réduite sera partout convergente, sauf sur les points pour lesquels on aura

$$\lim \lambda_n = \beta,$$

β étant un nombre réel, compris entre -2 et $+2$.

C'est, dans un cas particulier ($\rho_n = \mu_n = 1$), la réciproque de la propriété démontrée à la fin du paragraphe précédent. Nous arrivons ainsi d'une manière élémentaire à la notion de coupure qui sera étudiée plus en détail dans les Chapitres suivants.

Remarquons en terminant que le développement général (15)

$$\frac{\rho_0 \alpha_0}{\alpha_1} = \lambda_1 \cdot \frac{\rho_1 \lambda_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\rho_2 \lambda_3}{\lambda_3} \cdot \frac{\rho_3 \lambda_4}{\lambda_4} \cdot \dots$$

se ramène dans deux cas particuliers à la forme de développement étudiée ci-dessus.

1° Si $\rho_{i-1} = \mu_{i+1}$, on obtient

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_1}} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_2}} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_3}} \cdot \dots,$$

ce qui était évident *a priori*.

2° Si $\rho_i = \mu_i$, on aura

$$\frac{\rho_0 \alpha_0}{\rho_1 \alpha_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_2}} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_3}} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_4}} \cdot \dots,$$

et les conclusions précédentes s'appliquent immédiatement.

CHAPITRE III.

LES FRACTIONS CONTINUES MÉROMORPHES ET QUASI-MÉROMORPHES.

24. Considérons, comme dans le paragraphe 3, la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_4 + \dots}}},$$

dans laquelle les λ_n sont :

a. Ou des polynômes en x de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \dots + \gamma_n x^{1-j};$$

b. Ou des polynômes en $y = \sqrt{x}$ de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n y^{2j+1} + \beta_n y^{2j-1} + \dots + \gamma_n y^{1-2j}.$$

Nous admettrons que la série $\sum_1^{\infty} |\lambda_n|$ est uniformément convergente dans un certain domaine et nous allons étudier les conditions de convergence de $\frac{S_0}{S_1}$.

Rappelons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0,$$

et considérons les symboles \mathfrak{Q}_n^0 définis par la relation

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = |\lambda_n| \mathfrak{Q}_n^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \quad \text{avec} \quad \mathfrak{Q}_0^0 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1^0 = 1.$$

Il est clair que \mathfrak{Q}_n^0 sera une fonction majorante de Q_n^0 et l'on pourra écrire avec M. Poincaré (*)

$$|Q_n^0| \ll \mathfrak{Q}_n^0.$$

(*) La fonction majorante est réalisée effectivement lorsque tous les λ_n sont réels et alternativement de signe contraire.

Or, les conditions de convergence de \mathfrak{Q}_n^0 (pour $n = \infty$) sont faciles à établir ⁽¹⁾ : nous avons, en effet,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \mathfrak{Q}_n^0 < (1 + |\lambda_n|)(\mathfrak{Q}_n^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \mathfrak{Q}_n^0 < \prod_1^n (1 + |\lambda_i|).$$

En posant

$$\sum_1^\infty |\lambda_i| = S,$$

on aura évidemment

$$(29) \quad \lim |\mathfrak{Q}_n^0| < \lim \mathfrak{Q}_n^0 < e^S.$$

D'autre part, la formule récurrente

$$\mathfrak{Q}_{n-1}^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0 = \lambda_n \mathfrak{Q}_n^0$$

donne par l'addition de k égalités successives

$$\mathfrak{Q}_{n-1}^0 - (-1)^k \mathfrak{Q}_{n-1+2k}^0 = \sum_1^{k-1} (-1)^i \lambda_{n+2i} \mathfrak{Q}_{n+2i}^0.$$

Grâce à la convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ et à la limitation du module de \mathfrak{Q}_{n+2i}^0 , cette égalité permet de démontrer la convergence uniforme dans le domaine considéré de $(-1)^n \mathfrak{Q}_{2n}^0$ [de même que celle de $(-1)^n \mathfrak{Q}_{2n+1}^0$].

Posons ⁽²⁾

$$P_0 = \lim (-1)^n \mathfrak{Q}_{2n}^0, \quad I_0 = \lim (-1)^n \mathfrak{Q}_{2n+1}^0,$$

ces deux fonctions seront, selon l'expression de M. Maillet, des fonc-

(1) STERN, *Journal de Crelle*, t. 37. — SPIELTYS, *Op. cit.*, p. 39.

(2) P (initiale de pair), I (initiale de impair) pour indiquer la parité de l'indice inférieur qui croît indéfiniment.

tions quasi-entières aux deux points essentiels 0 et ∞ et, comme λ_n est de degré maximum j en x (ou $2j+1$ en y) et $j-1$ en $\frac{1}{x}$ (ou $2j-1$ en $\frac{1}{y}$), on verra directement, en appliquant le théorème de M. Hadamard, que l'ordre apparent et, par suite, le genre de P_0 et de I_0 sont, au plus, égaux aux degrés maxima ci-dessus.

On démontrera de même que les symboles $(-1)^r Q_{2n}^r$ et $(-1)^n Q_{2n+1}^r$ ont, comme limites pour $n = \infty$, deux fonctions quasi-entières P_1 et I_1 .

La relation

$$Q_{2n}^0 Q_{2n+1}^1 - Q_{2n+1}^0 Q_{2n}^1 = M_1^{2n} = 1$$

donnera à la limite

$$P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

ce qui prouve que les fonctions P_0 , P_1 (comme P_0 , I_0) ne peuvent avoir aucun diviseur commun.

Les réduites $\frac{Q_{2n}^0}{Q_{2n}^1}$, $\frac{Q_{2n+1}^0}{Q_{2n+1}^1}$ ont donc comme limites deux fonctions quasi-méromorphes, $\frac{P_0}{P_1}$, $\frac{I_0}{I_1}$, lesquelles sont essentiellement distinctes sur tout le plan complexe, car

$$\left| \frac{Q_{2n}^0}{Q_{2n}^1} - \frac{Q_{2n+1}^0}{Q_{2n+1}^1} \right| = \left| \frac{1}{Q_{2n}^1 Q_{2n+1}^1} \right| > \frac{1}{Q_{2n}^1 Q_{2n+1}^1} > 4e^{-2s},$$

puisque

$$Q_{2n}^1 + Q_{2n+1}^1 < e^s$$

et cette inégalité subsiste évidemment à la limite.

Dans ce cas, on dit communément que la fraction continue est *oscillante* ⁽¹⁾, expression qui, à notre avis, n'est pas exacte, car nous avons seulement démontré que les réduites de même parité tendent vers une limite bien déterminée; nous allons voir qu'en faisant une restriction, d'ailleurs bien naturelle, on peut dire que la fraction continue possède, en général, deux valeurs bien déterminées.

(1) SIEGEL, *op. cit.*, p. 39 et 40.

D'après la formule (4),

$$S_0 = Q_n^0 S_{n+1} - Q_{n+1}^0 S_n, \quad S_1 = Q_n^1 S_{n+1} - Q_{n+1}^1 S_n,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{Q_n^0 - Q_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1 - Q_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

on peut considérer la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ comme la limite d'une suite de fractions continues périodiques mixtes dont les n premiers termes sont les mêmes que ceux de $\frac{S_0}{S_1}$, le $n^{\text{ième}}$ se répétant uniformément à l'infini et formant à lui seul la période; il est clair qu'à la limite on pourra écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lambda_n - \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}}} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \pm i, \quad i = \sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$(30) \quad \frac{S_0}{S_1} = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \quad (1).$$

La fraction continue $Y = \frac{S_0}{S_1}$ satisfait donc à une équation du second degré

$$(31) \quad (P_1^2 + I_1^2) Y^2 - 2(P_0 P_1 + I_0 I_1) Y + P_0^2 + I_0^2 = 0.$$

On peut dire également qu'à la fraction continue correspond une substitution modulaire dans toute la région du plan complexe définie plus haut

$$Y = \frac{P_0 - I_0 Z}{P_1 - I_1 Z} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - I_0 P_1 = 1.$$

(1) L'application du théorème de M. Poincaré dont il sera question au Chapitre suivant conduirait au même résultat.

On aurait obtenu de la même manière

$$S_m = Q_n^m S_{n+1} - Q_{n+1}^m S_n$$

et

$$\frac{S_0}{P_0 \pm i\Gamma_0} = \frac{S_1}{P_1 \pm i\Gamma_1} = \dots = \frac{S_m}{P_m \pm i\Gamma_m},$$

P_m, I_m étant, comme P_0, I_0 , des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$(32) \quad P_0 I_m - P_m I_0 = -Q_m^0.$$

23. Maintenant admettons, comme précédemment, que $\lim |\lambda_n| = 0$ et soit m l'exposant de convergence de la série $\sum_1 |\lambda_n|$; par hypothèse, $\sum_1 |\lambda_n|^{m+\varepsilon}$ converge et $\sum_1 |\lambda_n|^{m-\varepsilon}$ diverge et, selon que $\sum_1 |\lambda_n|^m$ converge ou diverge, m est appelé l'exposant de convergence par excès ou par défaut.

Nous avons toujours l'inégalité fondamentale

$$|Q_{n+1}^0| < Q_{n+1}^0 < \prod_1^n (1 + |\lambda_i|) < e^{\sum_1^n \Gamma_i (1 + |\lambda_i|)}.$$

Soit ρ le plus petit entier tel que la série $\sum_1 |\lambda_n|^{\rho+1}$ converge, nous pourrions écrire, avec M. Lindelöf ⁽¹⁾,

$$|1 + |\lambda_i|| < \frac{|\lambda_i|}{1} + \frac{|\lambda_i|^2}{2} + \dots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_i|^\rho}{\rho} + \Lambda |\lambda_i|^\tau,$$

τ étant un nombre quelconque compris entre ρ et $\rho+1$ et Λ une constante qui se détermine aisément quand τ est donné.

En posant

$$P_{n+1}^0 = Q_{n+1}^0 e^{\frac{|\lambda_1|}{1} + \frac{|\lambda_2|^2}{2} + \dots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_\rho|^\rho}{\rho}} = Q_{n+1}^0 \prod_1^n n_i,$$

(1) BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 53.

on aura

$$|P_{n+1}^0| < e^{\sum_1^n |\lambda_i|^\tau},$$

d'où, en passant à la limite et en faisant $\tau = m + \varepsilon$ ou $\tau = m$ si ce dernier est l'exposant par excès, on aura

$$\lim |P_n^0| < e^{\sum_1^\infty |\lambda_i|^{m+\varepsilon}} \quad (\varepsilon = 0 \text{ dans la dernière hypothèse}).$$

Cette inégalité limite supérieurement l'ordre apparent et, par suite, le genre de $P_n^0 (n = \infty)$, dont nous allons démontrer la convergence uniforme pour des valeurs de n de même parité, augmentant indéfiniment.

En remplaçant, dans $Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0$, Q_n^0 par son expression en valeur de P_n^0 , il vient

$$P_{n+1}^0 = \lambda_n u_n P_n^0 - u_{n-1} u_n P_{n-1}^0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} |P_{n+1}^0| + |u_n P_n^0| &< |u_n| (1 + |\lambda_n|) (|P_n^0| + |u_{n-1} P_{n-1}^0|) \\ &< \prod_1^n |u_i| (1 + |\lambda_i|). \end{aligned}$$

Je dis que la série $\sum_1^\infty |u_n| (1 + |\lambda_n|) - 1$ est convergente, car on a, à partir d'une valeur finie de n ,

$$|u_n| (1 + |\lambda_n|) < e^{A|\lambda_n|^\tau} < 1 + K A |\lambda_n|^\tau.$$

En conséquence, nous nous trouvons dans le cas examiné plus haut et l'on démontrera que, selon la parité de n , P_n^0 tend uniformément vers deux limites $\mathfrak{P}_n, \mathfrak{Q}_n$, qui sont deux fonctions quasi-entières dont l'ordre apparent et le genre sont au plus égaux aux degrés maxima

des λ_n multipliés par m , exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$;

dans le cas où cet exposant est inférieur à l'unité, nous obtenons un résultat plus précis que celui établi dans le paragraphe précédent.

De même on démontrera que P_n^1 tend uniformément pour $n = \infty$ et selon la parité de n vers deux fonctions quasi-entières \mathfrak{Q}_1 et \mathfrak{A}_1 de même nature que \mathfrak{Q}_0 et \mathfrak{A}_0 .

En remplaçant les Q_n^0 par leur valeur dans

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{Q_n^0 - Q_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1 - Q_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

il vient

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{u_1} \frac{P_n^0 u_n - P_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{P_n^1 u_n - P_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

d'où, en passant à la limite et observant que

$$\lim u_n = 1, \quad \lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \pm i,$$

on aura

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{u_1} \frac{\mathfrak{Q}_0 \pm i \mathfrak{A}_0}{\mathfrak{Q}_1 \pm i \mathfrak{A}_1}.$$

De la relation

$$Q_n^0 Q_{n+1}^1 - Q_{n+1}^0 Q_n^1 = 1$$

on tire, en passant à la limite,

$$\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0 \mathfrak{Q}_1 = e^{\frac{\pi}{2}},$$

φ étant un polynome en x et $\frac{1}{x}$ dont les degrés maxima sont au plus égaux aux genres de \mathfrak{Q}_0 , \mathfrak{Q}_1 , ... Dès lors, en faisant rentrer cette exponentielle, de même que le facteur u_1 , dans la composition de ces fonctions quasi-entières, on pourra écrire comme précédemment

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - I_0 P_1 = 1.$$

Cette proposition pourrait d'ailleurs se généraliser dans le cas où m ne serait pas un nombre fini; on serait alors conduit à des fon-

tions quasi-entières, d'ordre apparent infiniment grand ou infiniment petit, auxquelles on pourrait faire application des résultats obtenus par MM. Borel, Maillet, Bontroux, etc. Nous n'insisterons pas sur cet ordre de recherches, notre but étant simplement d'établir ce théorème fondamental que, lorsque $|\lambda_n|$ tend uniformément vers zéro pour $n = \infty$, la fraction continue représente formellement deux fonctions quasi-méromorphes dont l'ordre apparent a une limite supérieure égale au produit de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ par le degré maximum de λ_n .

23^{bis}. Considérons deux polynômes entiers U, V, premiers entre eux; on sait qu'il est possible de déterminer deux autres polynômes de degrés inférieurs aux précédents et tels que l'on ait

$$SU - RV = 1.$$

Peut-on étendre ce théorème aux fonctions entières ou quasi-entières? Nous allons voir par les résultats précédents que cette généralisation n'est possible que dans les cas où sont réalisées les conditions d'exception de M. Picard dans son théorème sur les fonctions méromorphes.

Considérons donc deux fonctions quasi-entières P, Q aux points essentiels o et ∞ ; en réduisant en fraction continue la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$, il est clair que nous aurons

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 \omega - p_2}{q_1 \omega - q_2},$$

p_1, p_2, q_1, q_2 étant des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1.$$

A. Dans le cas général, ω est une fonction quasi-méromorphe $\frac{F}{G}$; par suite, l'on pourra écrire

$$P = p_1 F - p_2 G, \quad Q = q_1 F - q_2 G,$$

d'où l'on tire aussi

$$F = q_2 P - p_2 Q, \quad G = p_1 Q - q_1 P;$$

par conséquent, en général, F et G auront des ordres apparents non inférieurs à ceux de P et de Q .

B. Admettons que ω soit une fonction quasi-entière F : nous nous trouvons dans le premier cas d'exception signalé par M. Picard; la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ est équivalente (au sens de Dedekind) à la fonction quasi-entière F ; on aura donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 F - p_2}{q_1 F - q_2} \quad \text{et} \quad q_1 P - p_1 Q = 1.$$

Il est clair que $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais devenir égal à $\frac{p_1}{q_1}$.

De même, si ω est égal à l'inverse d'une fonction quasi-entière $\frac{1}{G}$, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 - p_2 G}{q_1 - q_2 G} \quad \text{et} \quad q_2 P - p_2 Q = 1.$$

$\frac{P}{Q}$ ne pourra jamais devenir égal à $\frac{p_2}{q_2}$.

C. Admettons enfin que ω soit une exponentielle e^z ; nous nous trouvons dans le second cas d'exception de M. Picard, puisque la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ peut se mettre sous la forme $\frac{p_1 e^z - p_2}{q_1 e^z - q_2}$. On en tire

$$q_1 P - p_1 Q = -1, \quad q_2 P - p_2 Q = e^z$$

et, par suite, la fonction $\frac{P}{Q}$ ne devient jamais égale ni à $\frac{p_1}{q_1}$ ni à $\frac{p_2}{q_2}$.

On en conclut d'une manière générale que les équations exceptionnelles de M. Picard ($\frac{P}{Q} = \psi$), si elles existent, seront obtenues par le développement de $\frac{P}{Q}$ en fraction continue; ce sont les solutions de ces équations qui permettront de généraliser le théorème sur les polynômes entiers rappelé au début.

26. Considérons la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 + \frac{\mu_2}{1} + \frac{\mu_3}{1} + \frac{\mu_4}{1} + \dots$$

et admettons que la série $\sum_2^\infty |\mu_n|$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

Posons

$$\sum_2^\infty |\mu_n| = S.$$

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \mu_n Q_{n-1}^0$$

conduit à la fonction majorante \mathfrak{Q}_n^0 définie par $\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = \mathfrak{Q}_n^0 + |\mu_n| \mathfrak{Q}_{n-1}^0$ avec les conditions initiales $\mathfrak{Q}_0^0 = 0$, $\mathfrak{Q}_1^0 = 1$; d'où l'on tire

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + |\mu_{n+1}| \mathfrak{Q}_n^0 < (1 + |\mu_{n+1}|)(\mathfrak{Q}_n^0 + |\mu_n| \mathfrak{Q}_{n-1}^0)$$

et, par suite,

$$|Q_{n+1}^0| < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \prod_2^{n+1} (1 + |\mu_i|) < e^S.$$

Donc nos raisonnements restent les mêmes que ci-dessus et nous pouvons démontrer, grâce à la convergence uniforme de $\sum_2^\infty |\mu_i|$ et à la limitation du module de Q_n^0 , que Q_n^0 tend uniformément, pour $n = \infty$ ⁽¹⁾, vers une fonction quasi-entière q_0 dont l'ordre apparent dépend du degré de μ_i et de l'exposant de convergence de $\sum_2^\infty |\mu_i|$.

On démontrera de même que Q_n^1 tend vers une fonction quasi-

(1) On a, en effet, quelle que soit la parité de k ,

$$Q_{n+k}^0 - Q_n^0 = - \sum_0^{k-1} \mu_{n+1+i} Q_{n+i}^0.$$

entière q_1 et, par suite, la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura pour limite une fonction quasi-méromorphe $\frac{Q_0}{q_1}$.

Le résultat que nous venons d'obtenir se complète immédiatement dans le cas où l'exposant de convergence de la série n'est plus un nombre fini, mais une quantité infiniment grande ou infiniment petite.

Considérons de même la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_4 + \dots}}} \quad (\lim |\lambda_n| = \infty)$$

et admettons que la série $\sum \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| = S$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

La fraction continue peut s'écrire

$$\frac{S_0}{\lambda_1 S_1} = 1 + \frac{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}}{1} + \frac{\frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}}{1} + \frac{\frac{1}{\lambda_3 \lambda_4}}{1} + \dots$$

et nous sommes ramené au cas précédent.

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \frac{1}{\lambda_{n+1} \lambda_n} Q_{n-1}^0$$

conduit à une fonction majorante \mathfrak{Q}_n^0 pour laquelle on a

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \mathfrak{Q}_n^0 < \left(1 + \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \right) \left(\mathfrak{Q}_n^0 + \left| \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right| \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \right) < \prod_{i=1}^n \left(1 + \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| \right),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \mathfrak{Q}_n^0 < e^S.$$

Par suite, en observant que

$$Q_{n+k}^0 - Q_n^0 = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{n+i-1} \lambda_{n+i}} Q_{n+i-1}^0$$

et que la convergence uniforme de la série $\sum \left| \frac{1}{\lambda_n} \right|$ entraîne celle de $\sum \left| \frac{1}{\lambda_{n-1} \lambda_n} \right|$, on pourra reproduire presque identiquement les raisonnements ci-dessus et l'on arrivera à démontrer, si $\frac{1}{\lambda_i}$ est un polynôme entier en x et $\frac{1}{x}$, que la fraction continue a pour limite une fonction quasi-méromorphe dont l'ordre apparent et, par conséquent, le genre ont une limite supérieure facile à déterminer.

Enfin, supposons que, dans la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 + \frac{\mu_2}{1} + \frac{\mu_3}{1} + \dots,$$

on ait

$$\lim \mu_n = \infty,$$

on pourra écrire cette fraction sous la forme

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\mu_2}} + \frac{1}{\frac{\mu_2}{\mu_3}} + \frac{1}{\frac{\mu_3}{\mu_2 \mu_4}} + \frac{1}{\frac{\mu_2 \mu_4}{\mu_3 \mu_5}} + \frac{1}{\frac{\mu_3 \mu_5}{\mu_2 \mu_4 \mu_6}} + \dots$$

Le produit de deux dénominateurs partiels successifs est égal à $\frac{1}{\mu_n}$ et tend vers zéro; donc l'un au moins de ces deux dénominateurs tend également vers zéro. Si tous ces dénominateurs tendent vers zéro, nous retombons sur le cas examiné précédemment; si un certain nombre de dénominateurs successifs tendent, les uns vers zéro, les autres vers une limite finie ou infinie, en groupant ces dénominateurs suivant la formule donnée au paragraphe 17, on obtiendra une nouvelle fraction continue dont le dénominateur tendra, en général, vers une limite bien déterminée. L'étude de la convergence de ces fractions fera l'objet du Chapitre suivant.

27. Nous allons appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à l'étude des fractions continues de Stieltjes.

Soit $\frac{S_0}{S_1} = \frac{\psi_0\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi_1\left(\frac{1}{x}\right)}$ une fraction dont les termes sont ordonnés par

rapport aux puissances décroissantes de la variable x .

En posant $x = y^2$ nous avons la formule (F)

$$\frac{S_0}{y^{2i-1}S_1} = \alpha_1 y + \frac{1}{\alpha_2 y} + \frac{1}{\alpha_3 y} + \frac{1}{\alpha_4 y} + \dots$$

1° Supposons que $\lim z_n = 0$; nous déterminerons comme précédemment des fonctions P_0, I_0, P_1, I_1 qui seront des fonctions entières de y de la forme

$$\begin{aligned} P_0 &= y Q_0(y^2), & P_1 &= R_1(y^2), \\ I_0 &= T_0(y^2), & I_1 &= y T_1(y^2) \end{aligned}$$

avec

$$P_0 I_1 - I_0 P_1 = x R_0(x) T_1(x) - R_1(x) T_0(x) = 1.$$

La fraction $\frac{S_0}{S_1}$ sera égale à la fonction méromorphe

$$(\sqrt{x})^{2i-1} \frac{\sqrt{x} R_0(x) \pm i R_1(x)}{T_0(x) \pm i \sqrt{x} T_1(x)} = x^{i-1} \frac{x R_0 \pm i \sqrt{x} R_1}{T_0 \pm i \sqrt{x} T_1}.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement que la fraction continue représente formellement les deux racines d'une équation du second degré, l'origine étant précisément le point critique autour duquel se permutent les deux racines.

Si m est l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |z_n|$, l'ordre apparent de R_0, R_1, T_0, T_1 , en y sera au plus égal à m et, par suite, l'ordre apparent en x sera au plus égal à $\frac{m}{2}$.

En particulier, si $m < 2$, ces fonctions seront de genre zéro en x .

2° Supposons maintenant que $\lim z_n = \infty$.

La fraction continue pourra s'écrire

$$\frac{S_0}{z_1^{\alpha_1} S_1} = 1 + \frac{\frac{1}{z_1} \frac{1}{z_2} x'}{1} + \frac{\frac{1}{z_2} \frac{1}{z_3} x'}{1} + \dots$$

Si m est l'exposant de convergence de la série $\sum_1^{\infty} \left| \frac{1}{z_n z_{n+1}} \right|$, nous savons que la fraction continue représentera une fonction méromorphe $\frac{q_0}{q_1}$ en $\frac{1}{x}$ dont l'ordre apparent sera au plus égal à m .

La fraction $\frac{S_0}{S_1}$ est donc égale à la fonction $\frac{q_0}{q_1}$ sur tout le plan complexe, sauf peut-être à l'origine qui est un point essentiel pour chacune des deux fonctions.

CHAPITRE IV.

LES FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES ET ASYMPTOTIQUEMENT PÉRIODIQUES.

28. Considérons tout d'abord la fraction périodique simple

$$Y = \lambda + \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda} + \dots,$$

et posons

$$\lambda = z + \frac{\mu^2}{z},$$

Y satisfait visiblement à l'équation du deuxième degré

$$Y^2 = \left(z + \frac{\mu^2}{z} \right) Y - \mu^2,$$

dont les racines sont z et $\frac{\mu^2}{z}$.

Nous allons démontrer que $Y = z$ si $|z| > |\mu|$ et $Y = \frac{\mu^2}{z}$ si $|z| < |\mu|$; en d'autres termes, que la fraction continue représente toujours la racine de plus grand module.

Pour $|z| = |\mu|$ les deux racines ont le même module et la fraction continue n'est pas convergente.

Dans le cas actuel la détermination explicite des symboles Q_n se fait sans aucune difficulté.

La relation récurrente

$$Q_{n+1} = \left(z + \frac{\mu^2}{z} \right) Q_n - \mu^2 Q_{n-1}$$

a pour solution générale

$$Q_n = A z^n + B \left(\frac{\mu^2}{z} \right)^n.$$

On a bien en effet

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{\mu^2}{z} \right) \left[A z^n + B \left(\frac{\mu^2}{z} \right)^n \right] \\ = A z^{n+1} + B \left(\frac{\mu^2}{z} \right)^{n+1} + \mu^2 \left[A z^{n-1} + B \left(\frac{\mu^2}{z} \right)^{n-1} \right], \end{aligned}$$

ce qui est la vérification de la propriété annoncée.

Pour déterminer A et B nous poserons

$$Q_0 = 0 = A + B, \quad \text{d'où} \quad B = -A,$$

$$Q_1 = -1 = A z + B \frac{\mu^2}{z} = A \left(z - \frac{\mu^2}{z} \right),$$

d'où

$$A = - \frac{1}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

et, par suite,

$$(33) \quad Q_n = - \frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z} \right)^n}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

formule qu'on peut d'ailleurs vérifier directement (1).

(1) D'une manière générale, si l'on a la fraction continue

$$Y = z + \frac{\beta}{z + \frac{\beta}{z + \frac{\beta}{z + \frac{\beta}{z + \frac{\beta}{z + \dots}}}}},$$

on aura

$$Q_n^0 = - \frac{z^n - \beta^n}{z - \beta},$$

et l'on établira la formule générale de récurrence

$$Q_{n+k}^0 = (z^k + \beta^k) Q_n^0 - z^k \beta^k Q_{n-k}^0.$$

D'autre part, il est clair que

$$Q'_n = Q_{n-1}^0 = - \frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

d'où il vient

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n}{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}} = \mu \frac{\left(\frac{z}{\mu}\right)^n - \left(\frac{\mu}{z}\right)^n}{\left(\frac{z}{\mu}\right)^{n-1} - \left(\frac{\mu}{z}\right)^{n-1}}.$$

Lorsque $\left|\frac{z}{\mu}\right| > 1$, cette expression a évidemment pour limite $\mu \frac{z}{\mu} = z$;
si, au contraire, on a $\left|\frac{z}{\mu}\right| < 1$, la valeur limite sera $\mu \frac{\mu}{z} = \frac{\mu^2}{z}$.

Dans le cas intermédiaire, si l'on pose $z = \mu e^{\theta i}$, il viendra

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \mu \frac{e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}}{e^{(n-1)\theta i} - e^{-(n-1)\theta i}} = \mu \frac{\sin n\theta}{\sin(n-1)\theta},$$

expression qui, en général, n'a pas de limite bien déterminée pour $n = \infty$.

29. En appelant Y' la racine conjuguée de Y on aura

$$Y' = \frac{\mu^2}{Y} = \left(\frac{\mu^2 Q_n^1}{Q_n^0}\right)_{n=\infty}.$$

Il viendra donc

$$Y' = \mu^2 \frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n} = \mu^2 \frac{z^{2n-1} - \mu^{2n-2} z}{z^{2n} - \mu^{2n}}.$$

Les racines du dénominateur sont

$$a_k = \mu e^{\frac{2k\pi i}{2n}} = \mu e^{\frac{k\pi i}{n}} = \mu e^{\theta_k i}.$$

Nous allons décomposer Y' en une somme de fractions simples

$$Y' = \mu^2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{M_k}{z - a_k}.$$

En utilisant le théorème de Lagrange on trouve facilement

$$Y' = \mu^2 \sum_1^{2n} \frac{1 - \mu^{2n-2} a_k^2}{2n(z - a_k)} = \sum_1^{2n} \frac{\mu^2 (1 - e^{2\theta_k i})}{2n(z - \mu e^{\theta_k i})}.$$

Si nous remarquons que $\frac{1}{2n} = \frac{\Delta\theta_k}{2\pi}$, il viendra

$$Y' = \sum_1^{2n} \frac{\mu^2 (1 - e^{2\theta_k i}) \Delta\theta_k}{2\pi(z - \mu e^{\theta_k i})},$$

d'où, en passant à la limite,

$$(34) \quad Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2 (1 - e^{2\theta i})}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} d\theta.$$

Telle est la formule fondamentale qui permet de mettre une fraction continue périodique simple sous la forme d'une intégrale définie à coupure.

Dans le cas actuel, la coupure est représentée par l'équation

$$z - \mu e^{\theta i} = 0,$$

dans laquelle θ varie de 0 à 2π .

A cette équation correspondent, en posant $z = x + yi$, une ou plusieurs courbes ou portions de courbes le long desquelles Y' est indéterminée : sur ces courbes également les deux racines que la fraction continue peut représenter ont même module ; partout ailleurs la fraction continue est convergente.

La formule (34) devient, en posant $e^{\theta i} = u$,

$$Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2 (e^{-\theta i} - e^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\mu^2 \left(\frac{1}{u} - u \right)}{z - \mu u} du$$

ou

$$Y' = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\mu \left(\frac{1}{u} - u \right)}{\frac{z}{\mu} - u} du,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement l'analogie avec les intégrales de Stieltjes.

50. Comme premier exemple considérons le cas simple $\mu = 1$. Il résulte de ce qui précède que la fraction continue Y représente $\frac{1}{z}$ à l'intérieur du cercle de rayon un , décrit de l'origine comme centre et z à l'extérieur de ce même cercle.

Nous sommes en présence d'une ligne singulière fermée et de deux domaines distincts de représentation à chacun desquels correspond l'intégrale

$$Y' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\frac{1}{u} - u}{z - u} du,$$

C est ici le cercle de rayon un .

La formule ci-dessus met en évidence une remarque bien connue et rappelée par M. Borel (¹).

Si, sur un contour fermé, on se donne au hasard une succession de valeurs, soit $p(s) + iq(s)$, en prenant l'arc s du contour comme variable indépendante, p et q admettant pour période la longueur totale du contour, l'intégrale

$$J = \int_C \frac{1}{2\pi i} \frac{p + iq}{z - x} dz$$

ne prendra pas sur C la succession des valeurs de $p + iq$.

J définit, en dedans et en dehors du contour C, deux fonctions holomorphes qui tendent uniformément sur C vers deux variétés infinies de valeurs et la différence de ces valeurs, en chaque point du contour, est précisément égale à $p + iq$.

La vérification de ce théorème sur l'exemple qui précède se fait immédiatement.

La formule (33)

$$Q_n^n = \frac{1}{z^n - 1} \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

(¹) *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 3.

nous montre que les zéros de Q_n^0 sont également répartis sur la circonférence de rayon un à l'exception des points $z = \pm 1$ pour lesquels on a $Q_n^0 = \pm n$. Il en sera de même à la limite, ce qui montre que la coupure est une ligne continue de zéros de : $\lim Q_n^0 = 0$.

51. Nous allons poser maintenant $z = e^{\alpha i}$.

Dans ce cas la fraction continue Y devient

$$Y = 2 \cos \alpha \div \frac{1}{2 \cos \alpha} \div \frac{1}{2 \cos \alpha} \div \dots,$$

ce qui donne

$$Y^2 = 2 \cos \alpha Y - 1,$$

dont les racines sont

$$e^{\alpha i} \quad \text{et} \quad e^{-\alpha i}.$$

Pour $|z| = 1$, α est une quantité réelle quelconque : la ligne singulière est donc ici l'axe des abscisses. Au-dessus de cet axe $\alpha = \beta + \gamma i$, $\gamma > 0$, d'où

$$e^{\alpha i} = e^{-\gamma} e^{\beta i}, \quad e^{-\alpha i} = e^{\gamma} e^{-\beta i},$$

et, comme Y représente la racine du plus grand module, nous aurons

$$Y = e^{-\alpha i} \quad \text{au-dessus de l'axe des abscisses}$$

et

$$Y = e^{\alpha i} \quad \text{au-dessous de ce même axe.}$$

La formule (34) devient ici

$$Y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{2\theta i}}{e^{\alpha i} - e^{\theta i}} d\theta$$

ou

$$Y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\frac{\theta-\alpha}{2}} \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta-\alpha}{2}} d\theta.$$

Les zéros de $Q_n^0 = 0$ sont également répartis sur l'axe des x à l'exception des points $x = \pm k\pi$.

Posons maintenant

$$\cos \alpha = x,$$

d'où

$$Y = 2x \div \frac{1}{2x} \div \frac{1}{2x} \div \frac{1}{2x} \div \dots,$$

d'où

$$Y^2 = 2xY - 1,$$

dont les racines sont

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}.$$

D'après ce qui précède on voit aisément que la coupure se réduit ici au segment de l'axe des abscisses compris entre -1 et $+1$.

Il est clair également qu'au-dessus de la coupure, il faudra prendre le signe $+$ devant le radical et le signe $-$ au-dessous.

Les zéros de $Q_n'' = 0$ qui, précédemment, étaient également répartis sur la circonférence se projettent sur le diamètre formant coupure avec une densité inversement proportionnelle à l'ordonnée du point représentatif; en d'autres termes, il y a infiniment plus de zéros près des extrémités du segment que près du milieu.

Nous savons qu'en dehors de la coupure, Y ne possède aucun point singulier; nous pouvons donc appliquer l'intégrale de Cauchy à un contour infiniment mince entourant le segment $-1 \dots +1$ et parcouru dans le sens inverse (sens des aiguilles d'une montre) puisque le domaine de représentation est à l'extérieur du contour.

Nous aurons donc

$$Y = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{2i\sqrt{1-x^2}}{x-z} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-z} dx.$$

En adoptant le langage de Stieltjes on peut dire qu'à la fraction Y correspond une répartition continue de masse sur le segment $-1 \dots +1$, la densité en chaque point étant proportionnelle à l'ordonnée de la circonférence décrite sur ce segment comme diamètre.

Considérons enfin la fraction continue

$$Y = 2 \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \div \frac{1}{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \div \frac{1}{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \div \dots,$$

dans laquelle $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ est une fraction rationnelle quelconque que nous mettrons, en posant $z = x + yi$, sous la forme

$$\frac{A + Bi}{C + Di} = \frac{AC + BD - i(AD - BC)}{C^2 + D^2}.$$

Il résulte de ce qui précède que Y sera partout convergente et bien déterminée sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on aura $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = t$, t étant une quantité réelle comprise entre -1 et $+1$; on aura pour déterminer ces courbes

$$AD - BC = 0, \quad AC + BD = t(C^2 + D^2),$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = t = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

L'équation analytique de la coupure est

$$AD - BC = 0,$$

mais une ou plusieurs parties de cette courbe seulement constituent les coupures proprement dites; ce sont celles rencontrées par les courbes

$$A - tC = 0, \quad B - tD = 0, \quad -1 \leq t \leq +1,$$

et c'est le long de ces courbes qu'il y aura lieu de prendre les intégrales définies ci-dessus.

Sur ces courbes la densité des zéros de $Q_n = 0$ sera inversement proportionnelle à

$$\sin \arccos t = \sqrt{1 - t^2}.$$

D'une manière générale, si l'on considère la fraction continue

$$v = \lambda + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} + \dots,$$

on établira aisément qu'elle représente toujours la racine de plus grand

module de l'équation

$$Y = \lambda - \frac{\mu}{Y}.$$

La fraction continue sera partout convergente sauf sur les courbes d'égal module pour lesquelles on aura

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = \theta,$$

θ étant une quantité réelle quelconque comprise entre 0 et +4; les racines Y_1, Y_2 prennent alors la forme

$$(Y_1, Y_2) = \frac{\lambda}{2} \left(1 \pm i \sqrt{\frac{\theta}{4} - 1} \right),$$

et elles ont évidemment même module.

En posant $\lambda^2 = A + Bi$, $\mu = C + Di$, l'équation analytique de la coupure est $AD - BC = 0$; mais la coupure proprement dite comprend seulement les parties réellement rencontrées par les courbes orthogonales

$$A - \theta C = 0, \quad B - \theta D = 0,$$

θ étant compris entre 0 et +4 ⁽¹⁾.

52. Considérons maintenant le cas d'une fraction périodique mixte, k étant le nombre de dénominateurs partiels qui précèdent la période. On a, d'après (8),

$$Q_{k+n}^0 = \mu_{k+1} Q_k^0 Q_{k+n}^{k+1} - Q_{k+1}^0 Q_{k+n}^k,$$

$$Q_{k+n}^1 = \mu_{k+1} Q_k^1 Q_{k+n}^{k+1} - Q_{k+1}^1 Q_{k+n}^k,$$

d'où

$$\frac{Q_{k+n}^0}{Q_{k+n}^1} = \frac{\mu_{k+1} Q_k^0 - Q_{k+1}^0 \frac{Q_{k+n}^k}{Q_{k+1}^k}}{\mu_{k+1} Q_k^1 - Q_{k+1}^1 \frac{Q_{k+n}^k}{Q_{k+1}^k}}.$$

Par hypothèse, Q_{k+n}^k, Q_{k+1}^{k+1} peuvent être calculées au moyen des formules du paragraphe 28 et, si (z) est la racine de plus grand mo-

(1) Si les deux racines ont partout le même module on peut dire que la fraction continue représente les deux racines sur tout le plan complexe.

dule à laquelle correspond la fraction périodique simple, nous savons que

$$\lim(n = \infty) \frac{Q_{k+n}^k}{Q_{k+n}^{k+1}} = (z);$$

par suite,

$$\lim(n = \infty) \frac{Q_n^0}{Q_1^1} = \frac{\mu_{k+i} Q_k^0 - (z) Q_{k+1}^0}{\mu_{k+i} Q_k^1 - (z) Q_{k+1}^1}.$$

Nous voyons, en conséquence, que les conditions de convergence de la fraction mixte sont les mêmes que celles de la fraction simple correspondante et que l'on passe de l'une à l'autre de ces fractions par une substitution linéaire.

En particulier, si $\mu_i = 1$, cette substitution devient modulaire et les deux fractions sont équivalentes au sens de Dedekind, c'est-à-dire que

$$Q_k^0 Q_{k+1}^1 - Q_{k+1}^0 Q_k^1 = 1.$$

55. Lorsque les dénominateurs (ou numérateurs) partiels tendent, pour $n = \infty$, vers une limite bien déterminée, nous dirons que la fraction continue est asymptotiquement périodique. Les résultats obtenus, tant au paragraphe précédent qu'au paragraphe **25**, nous permettent d'inférer que les conditions de convergence d'une semblable fraction seront les mêmes que celles de la fraction périodique limite correspondante.

Mais, avant d'examiner le cas général, nous allons examiner un cas particulier qui nous conduira à la notion de fraction semi-périodique simple.

Considérons la fraction continue

$$Y_1 = z + \frac{\rho_1}{z} + \frac{\rho_2}{z + \frac{\rho_2}{z}} + \frac{\rho_3}{z + \frac{\rho_3}{z}} + \frac{\rho_4}{z + \frac{\rho_4}{z}} + \dots$$

et admettons que $\lim \rho_n = R$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(z + \frac{\rho_n}{z} \right) Q_n^0 - \rho_n Q_{n-1}^0 \quad (1)$$

(1) Cette formule donne

$$Q_{n+1}^0 - z Q_n^0 = \frac{\rho_n}{z} (Q_n^0 - z Q_{n-1}^0) = \frac{\rho_n \rho_{n-1}}{z^2} (Q_{n-1}^0 - z Q_{n-2}^0) = - \frac{\rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_2 \rho_1}{z^n}.$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} Q_0^n &= 0, & -Q_1^n &= 1, & -Q_2^n &= \left(z + \frac{\rho_1}{z}\right), \\ -Q_3^n &= \left(z + \frac{\rho_2}{z}\right) \left(z + \frac{\rho_1}{z}\right) - \rho_2 = z^2 + \rho_1 + \frac{\rho_1 \rho_2}{z^2}, \\ -Q_4^n &= z^3 + \rho_1 z + \frac{\rho_1 \rho_2}{z} + \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{z^3}. \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus permettent de poser par induction la formule générale

$$-Q_n^n = z^{n-1} + \sum_1^{n-1} \rho_1 \rho_2 \dots \rho_j z^{n-1-2j},$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} -Q_{n+1}^n &= z^n + \rho_1 z^{n-2} + \rho_1 \rho_2 z^{n-4} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n z^{-n}, \\ -Q_{n+1}^1 &= z^{n-1} + \rho_2 z^{n-3} + \rho_2 \rho_3 z^{n-5} + \dots + \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n z^{-n+1} \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$-Q_{n+1}^n = z^n + \frac{\rho_1}{z} (-Q_{n+1}^1),$$

d'où

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} - \frac{z^n}{Q_{n+1}^1}.$$

Mettons $-Q_{n+1}^1$ sous la forme

$$-Q_{n+1}^1 = z^{n-1} \left(1 + \frac{\rho_2}{z^2} + \frac{\rho_2 \rho_3}{z^4} + \frac{\rho_2 \rho_3 \rho_4}{z^6} + \dots \right).$$

Le polynome entre parenthèses devient une série quand n augmente indéfiniment; le rapport d'un terme au suivant est $\frac{z^2}{\rho_k}$; admettons que, pour $k > k_0$, le module de ce rapport soit constamment supérieur à 1; nous obtiendrons une série convergente S et l'on pourra écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}^{0,1}}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}.$$

Écrivons, au contraire, $-Q'_{n+1}$ sous la forme

$$-Q'_{n+1} = \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n z^{-n+1} \left(1 + \frac{z^2}{\rho_n} + \frac{z^3}{\rho_n \rho_{n-1}} + \dots \right).$$

Dans le polynôme entre parenthèses qui devient une série pour $n = \infty$, le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k}{z^2}$, soit l'inverse du rapport précédent; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons une série convergente S' et l'on pourra écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_{n+1}}{Q'_1} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z^{2n-1}}{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_n S'},$$

mais, d'après l'hypothèse pour $k > k_0$,

$$\left| \frac{z^2}{\rho_k} \right| < 1,$$

d'où il vient

$$\left| \frac{z^{2n-1}}{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_n S'} \right| < (1 - \varepsilon)^{n-k_0} \left| \frac{\lambda z}{S'} \right|$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_{n+1}}{Q'_1} = \frac{\rho_1}{z}.$$

On conclut donc de ce qui précède :

Pour $|z| > \sqrt{R}$, on a

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}$$

et, pour $|z| < \sqrt{R}$,

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1}{Y_1} = z.$$

Dans le cas où ρ_n ne tendrait pas régulièrement vers sa limite R , on aurait à considérer les deux limites

$$\liminf. \sqrt[p]{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p} \quad \text{et} \quad \limsup. \sqrt[p]{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-p+1}}$$

qui peuvent être égales ou inégales. Le premier cas se présentera en

particulier si le nombre des φ ne tendant pas vers R est infiniment petit par rapport à ceux qui y tendent effectivement.

Considérons en second lieu la fraction

$$Y_2 = z + \frac{\rho_1}{z} + \frac{\rho_1}{z + \frac{\rho_2}{z}} + \frac{\rho_2}{z + \frac{\rho_3}{z}} + \frac{\rho_3}{z + \frac{\rho_4}{z}} + \dots$$

Nous aurons la formule récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(z + \frac{\rho_n}{z} \right) (Q_n^0 - \rho_{n-1} Q_{n-1}^0) \quad (1)$$

et l'on obtient, comme précédemment, par voie d'induction, la formule générale

$$- Q_n^0 = z^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_{n-1} \rho_{n-2} \dots \rho_{n-j} z^{n-1-j}$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

On en tire aisément

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = z + \frac{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n z^n}{Q_{n+1}^1}.$$

Mettons $- Q_{n+1}^1$ sous la forme

$$- Q_{n+1}^1 = \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n z^{-n+1} \left(1 + \frac{z^2}{\rho_2^2} + \frac{z^4}{\rho_2^2 \rho_3^2} + \dots \right).$$

Le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k^2}{z^2}$; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons, pour $n = \infty$, une série convergente Σ et il viendra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = z + \frac{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n z^n}{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_n z^{-n+1} \Sigma} = z + \frac{\rho_1}{z \Sigma}.$$

(1) Cette formule donne

$$Q_{n+1}^1 - \frac{\rho_n}{z} Q_n^1 = z \left(Q_n^0 - \frac{\rho_{n-1}}{z} Q_{n-1}^0 \right) = z^2 \left(Q_{n-1}^0 - \frac{\rho_{n-2}}{z} Q_{n-2}^0 \right) = \dots$$

Au contraire, on peut écrire

$$-Q'_{n+1} = z^{n+1} \left(1 + \frac{\rho_n}{z^2} + \frac{\rho_n \rho_{n-1}}{z^4} + \dots \right)$$

et si, pour $k > k_0$, le rapport $\left| \frac{z^2}{\rho_k} \right|$ est supérieur à 1, la série Σ' entre parenthèses sera convergente. On aura donc

$$\lim \frac{Q'_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = z + \frac{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}{z^{2n-1} \Sigma'}$$

et, d'après l'hypothèse $\left| \frac{\rho_k}{z^2} \right| < 1$, on voit que le terme complémentaire peut devenir plus petit qu'une quantité quelconque donnée *a priori*; on a donc finalement

$$\lim \frac{Q'_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = z.$$

Si nous considérons la fraction simple limite

$$y = z + \frac{R}{z} + \frac{R}{z + \frac{R}{z}} + \frac{R}{z + \frac{R}{z + \frac{R}{z}}} + \dots,$$

dont les valeurs sont z et $\frac{R}{z}$ selon que $|z| < \left| \frac{R}{z} \right|$, nous voyons que :

Pour $|z| < \left| \sqrt{R} \right|$,

$$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{R}{y};$$

Pour $|z| > \left| \sqrt{R} \right|$,

$$Y_2 = y.$$

On peut donc dire que Y_1 et Y_2 sont égales à leur fraction simple limite, mais d'un côté seulement de la coupure; c'est cette considération qui nous a conduit à leur donner l'appellation de *fractions semi-périodiques simples*.

En appliquant le théorème de Cauchy au domaine extérieur aux coupures, nous obtenons les formules

$$Y_1 = \int_c \frac{z dz}{S(z-x)}, \quad Y_2 = \int_c \frac{\rho_1 dz}{z \Sigma(z-x)}$$

qui constituent une généralisation des formules obtenues précédemment.

54. Considérons maintenant la fraction continue asymptotiquement périodique

$$Y = \lambda + \varepsilon_1 + \frac{1}{\lambda + \varepsilon_2} + \frac{1}{\lambda + \varepsilon_3} + \frac{1}{\lambda + \varepsilon_4} + \dots$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des dénominateurs partiels.

Posons $\lambda = \alpha + \frac{1}{x}$, α étant, par hypothèse, la racine de plus grand module qui satisfait à cette équation; nous avons vu précédemment que α est bien déterminée en tout point du plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles λ aurait une valeur réelle comprise entre -2 et $+2$.

Nous savons également, d'après ce qui a été démontré au paragraphe 25, que la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n}$ de la fraction continue tend, pour $n = \infty$, vers une limite bien déterminée en tout point de ce même domaine.

Les symboles Q_n^0 satisfont à la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{x} + \varepsilon_n \right) Q_n^0 - Q_{n-1}^0$$

et nous introduirons les symboles \mathfrak{Q}_n^0 définis par

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{x} \right) \mathfrak{Q}_n^0 - \mathfrak{Q}_{n-1}^0.$$

Nous rappellerons un Mémoire de M. Poincaré ⁽¹⁾ dans lequel le théorème suivant est établi :

Si l'on a l'équation de récurrence

$$u_n + R_1 u_{n-1} + R_2 u_{n-2} + \dots + R_k u_{n-k} = 0,$$

(1) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal of Mathematics*, 1885, p. 237). — Voir également (VAN VLECK, *Transactions of the American Mathematical Society*, juillet et octobre 1901, juillet 1903 et juillet 1904) une série d'articles sur la convergence des fractions continues.

R_1, R_2, \dots, R_k étant des fonctions quelconques de n qui tendent vers leurs limites $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ lorsque n croît indéfiniment, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite une racine de l'équation

$$z^k + \rho_1 z^{k-1} + \dots + \rho_{k-1} z + \rho_k = 0$$

et, en général, la racine de plus grand module.

En appliquant ce théorème au cas actuel, nous en concluons que $\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0}$ doit avoir, en général, pour limite α et exceptionnellement, dans certains cas particuliers, $\frac{1}{\alpha}$.

Cette dernière hypothèse est d'ailleurs à écarter; en effet, le rapport $\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0}$ est une fonction continue des ε_i qui, en vertu des résultats obtenus au paragraphe 28, devient toujours égale à α lorsque ceux-ci s'annulent; il n'est dès lors pas possible que ce rapport devienne égal à $\frac{1}{\alpha}$ tant que l'on reste, bien entendu, dans le domaine considéré où, par hypothèse, $|\alpha| > \left| \frac{1}{\alpha} \right|$.

Admettons donc que l'on ait $\lim \frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = \alpha$.

Des relations récurrentes ci-dessus nous tirons

$$Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0 = \alpha \left(Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0 \right) + \varepsilon_n Q_n^0,$$

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 = \alpha \left(\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \right);$$

d'où

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0} = \frac{Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0}{\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0} + \frac{\varepsilon_n Q_n^0}{\alpha \left(\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \right)}.$$

Nous déterminerons ε_n de manière à avoir

$$\varepsilon_n Q_n^0 = \alpha \varepsilon_n \left(Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0 \right),$$

ce qui donne

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{Q_n^0}{z \left(Q_n^0 - \frac{1}{z} Q_{n-1}^0 \right)} = \varepsilon_n \frac{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}}{z \left(\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} - \frac{1}{z} \right)}$$

et à la limite, pour $n = \infty$,

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{1}{z - \frac{1}{z}},$$

d'où l'on aura

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{z} Q_n^0}{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{z} Q_n^0} = (1 + \gamma_n) \frac{Q_n^0 - \frac{1}{z} Q_{n-1}^0}{Q_n^0 - \frac{1}{z} Q_{n-1}^0}$$

et, par récurrence,

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{z} Q_n^0}{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{z} Q_n^0} = \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i).$$

Nous verrions, en reproduisant les raisonnements du Chapitre précédent, que le second membre tend, pour $n = \infty$ et sous certaines restrictions, vers une fonction entière ou quasi-entière q_0 dont l'ordre apparent dépend essentiellement de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\gamma_n|$, lequel est évidemment le même que celui de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

En partant de la relation récurrente

$$Q_{n+1}^1 = \left(z + \frac{1}{z} + \varepsilon_n \right) Q_n^1 - Q_{n-1}^1,$$

nous aurions trouvé, par le même procédé,

$$\frac{Q_{n+1}^1 - \frac{1}{z} Q_n^1}{Q_{n+1}^1 - \frac{1}{z} Q_n^1} = \prod_{i=2}^n (1 + \gamma_i)$$

et nous verrions que le second membre tend, pour $n = \infty$, vers une fonction entière ou quasi-entière q_1 de même nature que q_0 .

La relation

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 = \alpha \left(\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \right).$$

donne, d'ailleurs, par récurrence,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 = -\alpha^n,$$

de même

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1 = -\alpha^{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\lim \frac{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1} = \lim \frac{\mathfrak{Q}_n^0}{\mathfrak{Q}_n^1} = \lim \frac{\alpha \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i)}{\prod_{i=2}^n (1 + \gamma_i)} = \frac{\alpha q_0}{q_1},$$

et nous voyons que la réduite $\frac{\mathfrak{Q}_n^0}{\mathfrak{Q}_n^1}$ a pour limite une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure facile à déterminer.

Il nous reste à mettre en évidence α dans les deux termes de la fraction ainsi obtenue.

Nous avons

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 \right) q_n^0 \quad \text{avec} \quad \lim q_n^0 = q_0,$$

d'où

$$\alpha \mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \mathfrak{Q}_n^0 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 \right) \alpha q_n^0.$$

Posons

$$\alpha q_n^0 = p_n^0 - \alpha i_n^0,$$

p_n^0 et i_n^0 étant fonctions de λ seulement.

On aura

$$\alpha \mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \mathfrak{Q}_n^0 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0 \right) (p_n^0 - \alpha i_n^0).$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on change α en $\frac{1}{\alpha}$ et il vient

$$\frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \mathfrak{Q}_n^0 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \alpha \mathfrak{Q}_n^0 \right) \left(p_n^0 - \frac{1}{\alpha} i_n^0 \right),$$

d'où l'on tire en résolvant

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^0 &= \mathfrak{Q}_n^0 p_n^0 - \mathfrak{Q}_{n+1}^0 i_n^0, \\ Q_n^0 &= \mathfrak{Q}_{n-1}^0 p_n^0 - \mathfrak{Q}_n^0 i_n^0 \end{aligned}$$

et, en observant que

$$(\mathfrak{Q}_n^0)^2 - \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \mathfrak{Q}_{n+1}^0 = 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} p_n^0 &= \mathfrak{Q}_n^0 Q_{n+1}^0 - \mathfrak{Q}_{n+1}^0 Q_n^0, \\ i_n^0 &= \mathfrak{Q}_{n-1}^0 Q_{n+1}^0 - \mathfrak{Q}_n^0 Q_n^0. \end{aligned}$$

Nous avons de même, en posant $q_n^1 = p_n^1 - \alpha i_n^1$ avec $\lim q_n^1 = q_1$,

$$Q_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} Q_n^1 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1 \right) q_n^1 = \left(\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1 \right) (p_n^1 - \alpha i_n^1),$$

p_n^1 et q_n^1 étant fonctions de λ seulement, et l'on trouvera, par le même procédé,

$$\begin{aligned} p_n^1 &= \mathfrak{Q}_{n+1}^1 Q_{n+1}^1 - \mathfrak{Q}_{n+2}^1 Q_n^1, \\ i_n^1 &= \mathfrak{Q}_n^1 Q_{n+1}^1 - \mathfrak{Q}_{n+1}^1 Q_n^1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, après réduction,

$$p_n^0 i_n^1 - i_n^0 p_n^1 = Q_n^0 Q_{n+1}^1 - Q_{n+1}^0 Q_n^1 = 1.$$

Cette relation aura encore lieu à la limite et l'on pourra finalement écrire

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

P_0 , P_1 , I_0 , I_1 étant des fonctions entières ou quasi-entières de $\lambda = z + \frac{1}{z}$ dont l'ordre apparent est évidemment le même que celui de q_0 et de q_1 .

Nous arrivons ainsi à une formule que le résultat du paragraphe 52 permettait de prévoir et qui constitue une généralisation importante de la formule (30) du Chapitre précédent; en particulier, pour $\lambda = \pm \alpha$, $z = \pm i$ et l'on retombe sur cette formule.

Soient z' , z'' les deux racines en un point de la coupure.

D'un côté de celle-ci nous avons à la limite

$$Y' = \frac{P_0 - z' I_0}{P_1 - z' I_1}.$$

De l'autre côté, c'est l'autre racine qui aura le plus grand module et l'on aura également à la limite

$$Y'' = \frac{P_0 - z'' I_0}{P_1 - z'' I_1},$$

d'où il viendra

$$Y' - Y'' = \frac{z' - z''}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2}.$$

On aura donc, en appliquant le théorème de Cauchy et en prenant l'intégrale suivant la coupure,

$$Y = \int_c \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 + I_1^2 - \lambda P_1 I_1} \frac{dz}{z - x}.$$

Nous voyons également que les deux déterminations de Y sont racines de l'équation

$$Y^2 (P_0^2 - \lambda P_0 I_0 + I_0^2) - 2Y \left[(P_0 P_1 + I_0 I_1) - \frac{\lambda}{2} (P_0 I_1 + P_1 I_0) \right] + P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2 = 0.$$

Pour $\lambda = 0$, on retombe sur l'équation (31).

Nous avons donc établi d'une manière générale qu'une fraction continue asymptotiquement périodique satisfait à une équation du deuxième degré dont les coefficients sont des fonctions entières ou quasi-entières.

Considérons en dernier lieu la fraction continue

$$Y = \alpha + \beta + \varepsilon_1 \div \frac{\alpha_2' + \varepsilon_2}{\alpha + \beta + \varepsilon_2} \div \frac{\alpha_3' + \varepsilon_3}{\alpha + \beta + \varepsilon_3} \div \dots,$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des numérateurs et dénominateurs partiels ($\lim \varepsilon_n = \lim \varepsilon_\mu = 0$) et les valeurs ($Y' = \alpha$, $Y'' = \beta$) de la fraction périodique simple limite.

Dans ce cas, nous avons vu que la coupure sera constituée par les courbes sur lesquelles on a $|z| = |\beta|$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = (\alpha + \beta + \varepsilon_n) Q_n^0 - (\alpha\beta + \gamma_n) Q_{n-1}^0.$$

Considérons le symbole ϱ_n^0 défini par

$$\varrho_{n+1}^0 = (\alpha + \beta) \varrho_n^0 - \alpha\beta \varrho_{n-1}^0.$$

Nous savons que

$$\varrho_n^0 = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

et si α est la racine de plus grand module nous aurons

$$\lim \frac{\varrho_{n+1}^0}{\varrho_n^0} = \alpha.$$

De même l'application du théorème de M. Poincaré nous conduit à poser

$$\lim \frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = \alpha.$$

Dès lors nous avons

$$Q_{n+1}^0 - \beta Q_n^0 = \alpha(Q_n^0 - \beta Q_{n-1}^0) + \varepsilon_n Q_n^0 - \gamma_n Q_{n-1}^0.$$

Déterminons γ_n par l'égalité

$$\varepsilon_n Q_n^0 - \gamma_n Q_{n-1}^0 = \alpha \gamma_n (Q_n^0 - \beta Q_{n-1}^0),$$

d'où

$$\gamma_n = \frac{\varepsilon_n Q_n^0 - \gamma_n Q_{n-1}^0}{\alpha(Q_n^0 - \beta Q_{n-1}^0)},$$

et à la limite

$$\lim \gamma_n = \frac{\varepsilon_n \alpha - \gamma_n}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

d'où

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \beta Q_n^0}{\varrho_{n+1}^0 - \beta \varrho_n^0} = (1 + \gamma_n) \frac{Q_n^0 - \beta Q_{n-1}^0}{\varrho_n^0 - \beta \varrho_{n-1}^0} = \prod_1^n (1 + \gamma_i),$$

et les calculs pourront se poursuivre comme précédemment. Nous arriverons à démontrer le théorème général à savoir que

$$Y = \lim \frac{Q_n^0}{Q_1^0} = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

P_0, I_0, P_1, I_1, R étant des fonctions entières ou quasi-entières dont l'ordre apparent aura une limite supérieure déterminée par la considération des exposants de convergence des séries $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|, \sum_2^\infty |\gamma_n|$. En ce qui concerne R son ordre apparent aura une limite supérieure qui dépendra seulement de l'exposant de cette dernière série ⁽¹⁾.

Dans le cas particulier où α et β ont partout le même module, on pourrait reprendre les calculs qui précèdent et, en reproduisant les raisonnements du paragraphe 24, on arriverait à démontrer que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions ainsi définies

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \quad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}$$

avec $P_0 I_1 - P_1 I_0 = R$.

55. Les considérations qui précèdent s'appliquent immédiatement aux fractions continues de Stieltjes.

Nous avons mis celles-ci sous la forme

$$\frac{S_0}{y^{2i-1}S_1} = Y = \alpha_1 y \div \frac{1}{\alpha_2 y} \div \frac{1}{\alpha_3 y} \div \frac{1}{\alpha_4 y} \div \dots$$

Admettons que $\alpha_n = A + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

Nous savons que les conditions de convergence de cette fraction seront les mêmes que pour la fraction simple limite

$$u = A y - \frac{1}{u},$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{1}{2} (A y \pm \sqrt{A^2 y^2 - 4}).$$

La coupure est formée par la ligne droite reliant les deux points $-\frac{2}{A}$,

(1) R est égal, en effet, à $\prod_2^\infty \left(1 + \frac{\gamma_i}{\alpha_i^2}\right)$ sous réserve des facteurs primaires qu'il est nécessaire d'introduire pour rendre ce produit convergent.

$+\frac{2}{\lambda}$; comme d'ailleurs, pour $y = 0$, les deux valeurs de u ont même module 1, il en résulte que l'origine se trouve sur la coupure et que celle-ci va du point $-\frac{2}{\lambda}$ au point $+\frac{2}{\lambda}$ en passant par l'origine; c'est un segment de longueur $\left|\frac{4}{\lambda}\right|$.

La fraction sera égale à

$$Y = \frac{P_0 - u I_0}{P_1 - u I_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

P_0, I_0, P_1, I_1 ayant un ordre apparent en y au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^{\infty} |\varepsilon_n|$.

Si l'on considère Y comme fonction de $x = y^2$ le binôme sous le radical devient $A^2 x - 1$ et l'on voit immédiatement que la coupure est une droite qui s'étend depuis le point $x = \frac{1}{\lambda^2}$ jusqu'à l'infini en passant par l'origine.

La fraction de Stieltjes peut aussi s'écrire

$$Y = 1 + \frac{\beta_1 \frac{1}{x}}{1} + \frac{\beta_2 \frac{1}{x}}{1} + \frac{\beta_3 \frac{1}{x}}{1} + \dots$$

avec

$$\beta_n = B + \varepsilon_n, \quad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Posons $\frac{1}{x} = z$. Cette fraction aura les mêmes conditions de convergence que la fraction simple limite

$$u = 1 + \frac{Bz}{u},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4Bz}).$$

La coupure s'étend depuis le point $z = \frac{1}{4B}$ jusqu'à l'infini suivant la droite issue de l'origine; mais elle ne renferme pas celle-ci, car, pour $z = 0$, u a deux valeurs distinctes : 1 et 0.

Comme précédemment on pourra écrire

$$Y = \frac{P_0 - u I_0}{P_1 - u I_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

P_0, I_0, P_1, I_1, R ayant un ordre apparent en z au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^{\infty} |\varepsilon_n|$.

En utilisant la formule du paragraphe 17 il sera facile de ramener au cas étudié ci-dessus le cas d'une fraction asymptotiquement périodique dont les dénominateurs et numérateurs partiels tendent respectivement pour $n = \infty$ vers k limites distinctes $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, M_1, M_2, \dots, M_k$ avec

$$\lim \lambda_{nk+i} = \Lambda_i, \quad \lim \mu_{nk+i} = M_i.$$

CHAPITRE V.

A. GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE STIELTJES.

56. Considérons la fraction continue

$$F = \lambda_1 x \pm \mu_1 + \frac{\rho_2}{\lambda_2 x \pm \mu_2} + \frac{\rho_3}{\lambda_3 x \pm \mu_3} + \frac{\rho_4}{\lambda_4 x \pm \mu_4} \dots,$$

dans laquelle nous supposons explicitement λ_i, μ_i, ρ_i , réels et positifs.

Nous avons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = (\lambda_n x \pm \mu_n) Q_n^0 - \rho_n Q_{n-1}^0,$$

avec les valeurs particulières

$$\begin{aligned} -Q_1^0 &= 1, & -Q_2^0 &= \lambda_1 x \pm \mu_1, \\ -Q_3^0 &= (\lambda_2 x \pm \mu_2)(\lambda_1 x \pm \mu_1) - \rho_2. \end{aligned}$$

De ces formules il résulte immédiatement que $-Q_{n+1}^0$ est un polynôme entier en x à coefficients réels, de degré n et que le coefficient de x^n est $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, c'est-à-dire positif.

Considérons la suite des polynomes

$$-Q_{n+1}^0, -Q_n^0, \dots, -Q_2^0, -Q_1^0 = 1.$$

Je dis que c'est une suite de Sturm.

En effet :

1^o Deux polynomes consécutifs $-Q_{i+1}^0, -Q_i^0$ ne peuvent pas s'annuler simultanément pour une valeur de la variable, car, en vertu de la relation récurrente (6), il en serait de même de $-Q_{i+2}^0, -Q_{i+1}^0, \dots, -Q_2^0$ et $-Q_1^0 = 1$, ce qui est impossible.

2^o Si un polynome $-Q_i^0$ s'annule, il résulte de la relation ci-dessus que les polynomes contigus $-Q_{i+1}^0$ et $-Q_{i-1}^0$ sont de signe contraire.

3^o Enfin, pour $x = -\infty$, la suite n'offre que des variations; pour $x = +\infty$ elle n'offre que des permanences; donc, toutes les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont réelles et séparées par celles, également toutes réelles, de $Q_n^0 = 0$. En outre, si x_0 annule Q_{n+1}^0 , $Q_n^0(x_0)$ aura le même signe que la dérivée $(Q_{n+1}^0)'_{x_0}$.

On démontrerait exactement de la même manière que la suite

$$-Q_{n+1}^1, -Q_{n+1}^1, \dots, -Q_{n+1}^{a-2}, -Q_{n+1}^{a-1}, -Q_{n+1}^a = 1$$

est une suite de Sturm.

Les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles toutes réelles de $Q_{n+1}^1 = 0$ et, si x_0 annule Q_{n+1}^0 , $Q_{n+1}^1(x_0)$ a le même signe que $(Q_{n+1}^0)'_{x_0}$ et par conséquent que $(Q_n^0)'_{x_0}$.

De ce qui précède il résulte immédiatement que toutes les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont distinctes; si, en effet, cette équation avait une racine multiple, celle-ci serait également racine de $Q_n^0 = 0$ et $Q_{n+1}^1 = 0$, ce qui est évidemment incompatible avec la relation

$$Q_n^0 Q_{n+1}^1 - Q_{n+1}^0 Q_n^1 = \prod_{j=1}^n z_j \neq 0.$$

57. Nous allons généraliser la proposition qui précède et démontrer que les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles de $Q_j^0 Q_{n+1-j}^0 = 0$

$$0 < j < n+1.$$

Pour $j = 1, j = n$ on retrouve la proposition ci-dessus.

Nous avons, en effet, d'après (8),

$$Q_{n-1}^0 = \rho_j Q_{n-1}^0 Q_{n-1}^j - Q_j^0 Q_{n+1}^{j+1},$$

et, en remplaçant, d'après (7), Q_{n+1}^j par sa valeur

$$(\lambda_j x \pm \mu_j) Q_{n+1}^j - \rho_{j+1} Q_{n+1}^{j+1},$$

il viendra

$$Q_{n-1}^0 = \rho_j Q_{j-1}^0 Q_{n-1}^j + \rho_{j+1} Q_j^0 Q_{n+1}^{j+1} - (\lambda_j x \pm \mu_j) Q_j^0 Q_{n+1}^j,$$

d'où, en divisant par $Q_j^0 Q_{n+1}^j$,

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_j^0 Q_{n+1}^j} = -(\lambda_j x \pm \mu_j) + \rho_j \frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0} + \rho_{j+1} \frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}.$$

D'après ce qui précède nous savons que, si α est une racine de $Q_j^0 = 0$, l'expression $\frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0}$ passe du négatif au positif quand x passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$; de même, si β est une racine de $Q_{n+1}^j = 0$, l'expression $\frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}$ passe comme la précédente de $-\infty$ à $+\infty$ quand x varie de $\beta - \varepsilon$ à $\beta + \varepsilon$. Supposons maintenant que $\gamma, \delta, (\gamma < \delta)$, soient deux racines consécutives de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

Durant l'intervalle $\gamma + \varepsilon, \delta - \varepsilon$ le dénominateur $Q_j^0 Q_{n+1}^j$ conserve le même signe; pour $x = \gamma + \varepsilon$ le second membre tend vers $+\infty$; pour $x = \delta - \varepsilon$ il tend vers $-\infty$; le numérateur Q_{n-1}^0 s'annule donc bien au moins une fois dans cet intervalle. En outre, pour $x = -\infty$ le second membre tend vers $+\infty$ et pour $x = +\infty$ il tend vers $-\infty$; donc les racines de $Q_{n-1}^0 = 0$ sont séparées par celles de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$ et par le point à l'infini.

Remarquons d'ailleurs que, si $Q_j^0 = 0$ et $Q_{n+1}^j = 0$ ont une ou plusieurs racines communes, ces racines satisferont également à $Q_{n+1}^0 = 0$ en vertu de la relation ci-dessus; et il est clair que ces racines ne dépendront ni de λ_j ni de μ_j qui ne figurent pas dans $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

De la relation (8) nous tirons

$$\frac{\partial Q_{n+1}^0}{\partial \rho_j} = -Q_j^0 Q_{n+1}^j.$$

Si nous considérons une racine x_0 de $Q_{n-1}^0 = 0$ comme fonction de μ_j il viendra en différentiant

$$(Q_{n+1}^0)'_{x_0} \frac{dx_0}{d\mu_j} - Q_j^0 Q_{n-1}^j = 0,$$

d'où

$$\frac{dx_0}{d\mu_j} = \frac{Q_j^0 Q_{n+1}^j}{(Q_{n+1}^0)'_{x_0}}.$$

Or, d'après ce qui précède, on voit facilement que $Q_j^0 Q_{n+1}^j$ a toujours le signe de $(Q_{n+1}^0)'_{x_0}$; la dérivée $\frac{dx_0}{d\mu_j}$ est donc toujours positive et x_0 croît en même temps que μ_j .

58. Considérons la fraction

$$\frac{Q_{n+1}^1}{Q_{n+1}^0} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

nous savons que tous les a_i sont distincts; d'autre part,

$$A_j = \frac{Q_{n+1}^1(a_j)}{(Q_{n+1}^0)'_{a_j}},$$

et ce coefficient sera toujours positif.

Nous avons d'ailleurs

$$\begin{aligned} -Q_{n+1}^1 &= \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n x^{n-1} + \dots \\ -Q_{n+1}^0 &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n x^n + \dots \end{aligned}$$

d'où, en vertu d'un théorème connu,

$$\sum A_i = \frac{1}{\lambda_1}.$$

On peut donc poser avec Stieltjes

$$\lim \frac{Q_{n+1}^1}{Q_{n+1}^0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(z)}{z - x},$$

φ étant une fonction constamment croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et dont la croissance totale dans cet intervalle est égale à $\frac{1}{\lambda_1}$.

Les considérations de Stieltjes peuvent donc être reproduites sans aucun autre changement que la coupure s'étend ici de $-\infty$ à $+\infty$ tandis que dans le Mémoire de Stieltjes elle était limitée à la partie négative de cet axe; nous ne pouvons dès lors que renvoyer à ce remarquable Mémoire. Nous ferons seulement la remarque suivante :

Si l'on effectue la transformation

$$x = e^{-\theta i} z,$$

on remplacera l'axe des x par un nouvel axe incliné de l'angle θ sur l'horizontale.

En posant

$$z = e^{\theta i} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \beta},$$

le nouvel axe deviendra une circonférence passant par les points α et β et capable de l'angle θ . Dans ces conditions, le dénominateur partiel devient

$$\lambda_n \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \beta} \pm \mu_n, \quad \lambda_n, \mu_n \text{ positifs.}$$

Si donc une fraction continue affecte cette forme, nous saurons déterminer complètement la circonférence formant coupure.

Les résultats de Stieltjes s'appliquent intégralement, sauf le changement d'une droite en une circonférence; on pourrait d'ailleurs adopter une transformation plus compliquée, mais celle que nous venons d'indiquer est la transformation linéaire la plus générale.

B. GÉNÉRALISATION DES FRACTIONS CONTINUES.

59. Nous avons indiqué ailleurs ⁽¹⁾ la possibilité de généraliser la théorie des fractions continues; nous allons en faire une application sommaire aux principaux résultats que nous avons obtenus précédemment.

Considérons k polynômes ou séries S_1, S_2, \dots, S_k , ordonnés par

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances des 4^{re} décembre 1902 et 11 septembre 1905.

rapport aux puissances décroissantes de la variable x et de degrés maxima respectifs $n-1$, $n-2$, ..., $n-k$.

En divisant S_1 par S_k nous obtiendrons comme quotient un polynôme entier de degré $k-1$ et un reste de degré maximum $n-k-1$. Nous pouvons donc écrire

$$S_1 = \lambda_k S_k + (-1)^{k-1} S_{k+1}.$$

Nous pourrions de même diviser S_2 par S_{k+1} ; le quotient λ_{k+1} sera, en général, de degré $k-1$ et le reste $(-1)^{k-1} S_{k+2}$ de degré maximum $n-k-2$. Nous aurons donc

$$S_2 = \lambda_{k+1} S_{k+1} + (-1)^{k-1} S_{k+2}$$

et ainsi de suite.

On obtiendra de cette manière une suite limitée ou illimitée

$$S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \dots,$$

qui sera entièrement déterminée par la connaissance des k premiers termes et qui constitue la généralisation naturelle de la forme normale (A) (voir Introduction, p. 2).

Pour plus de concision nous ne parlerons pas ici des formes normales généralisées (C).

Nous introduirons comme précédemment des symboles Q'_n qui satisfont à de nombreuses relations, généralisations de celles établies dans le Chapitre I et notamment aux suivantes

$$(6') \quad Q'_{n+k} = \lambda_{n+k-1} Q'_{n+1} + (-1)^{k-1} Q'_n,$$

$$(7') \quad Q'_n = \lambda_{i+k-1} Q'^{i+k-1}_{n+1} + (-1)^{k-1} Q'^{i+k}_{n+1},$$

$$(12') \quad \begin{vmatrix} Q'_n & Q'^{i+1}_n & Q'^{i+2}_n & \dots & Q'^{i+k-1}_n \\ Q'_{n+1} & Q'^{i+1}_{n+1} & Q'^{i+2}_{n+1} & \dots & Q'^{i+k-1}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q'_{n+k-1} & Q'^{i+1}_{n+k-1} & Q'^{i+2}_{n+k-1} & \dots & Q'^{i+k-1}_{n+k-1} \end{vmatrix} = 1,$$

et qui permettent d'établir la relation générale (4')

$$S_i = Q'_{n+1} S_n + Q'_{n+2} S_{n+1} + \dots + Q'_{n+k-1} S_{n+k-2} + (-1)^{k-1} Q'_n S_{n+k-1}.$$

On pourra étudier ce que deviennent à la limite, pour $n = \infty$, les rapports

$$Q_n^1 : Q_n^2 : \dots : Q_n^k \quad \text{et} \quad Q_{n+1}^1 : Q_{n+2}^1 : \dots : Q_{n+k}^1.$$

En particulier, si les λ_n décroissent indéfiniment et si la série $\sum_2^\infty |\lambda_n|$ est uniformément convergente, on introduira les fonctions majorantes \mathfrak{Q}_n^i ainsi définies

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^i = |\lambda_{n+k-1}| \mathfrak{Q}_{n+1}^i + \mathfrak{Q}_n^i,$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^i + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^i + \dots + \mathfrak{Q}_{n+1}^i < (1 + |\lambda_{n+k+1}|)(\mathfrak{Q}_{n+k-1}^i + \mathfrak{Q}_{n+k-2}^i + \dots + \mathfrak{Q}_n^i),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^i < \mathfrak{Q}_{n+k}^i + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^i + \dots + \mathfrak{Q}_{n+1}^i < \prod_1^n (1 + |\lambda_{n+k+1}|).$$

En reproduisant les raisonnements du Chapitre III on démontrera donc que les Q_n^i tendent uniformément selon le reste minimum de n (mod k) vers k fonctions entières ou quasi-entières lorsque n augmente indéfiniment.

En appelant j, j^2, j^3, \dots, j^k les k racines de l'équation

$$x^k = (-1)^{k-1}$$

et

$$\begin{array}{cccc} P_1^1, & P_2^1, & \dots, & P_k^1, \\ P_1^2, & P_2^2, & \dots, & P_k^2, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ P_1^k, & P_2^k, & \dots, & P_k^k \end{array}$$

un système de k^2 fonctions entières obtenues comme précédemment et dont le déterminant est égal à ± 1 , on aura

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{jP_1^1 + j^2P_1^2 + \dots + j^kP_1^k} &= \frac{S_2}{jP_2^1 + j^2P_2^2 + \dots + j^kP_2^k} = \dots \\ &= \frac{S_k}{jP_k^1 + j^2P_k^2 + \dots + j^kP_k^k}, \end{aligned}$$

c'est la généralisation de la formule (30).

Si, au contraire, les λ_n tendent pour $n = \infty$ vers une limite bien déterminée Λ on verra que les rapports

$$Q'_n : Q''_n : \dots : Q^k_n \quad \text{et} \quad Q'_{n+1} : Q'_{n+2} : \dots : Q'_{n+k}$$

tendent vers des limites bien déterminées sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes pour lesquelles l'équation de M. Poincaré

$$z^k = \Lambda z + (-1)^{k-1}$$

possède deux ou plusieurs racines de même module maximum.

En dehors de ces courbes, en appelant z la racine de module maximum, qui est ainsi bien déterminée, on établira que l'on a la relation générale

$$\frac{S_1}{zP_1^1 + z^2P_1^2 + \dots + z^kP_1^k} = \dots = \frac{S_k}{zP_k^1 + z^2P_k^2 + \dots + z^kP_k^k},$$

le déterminant des k^2 fonctions P_n^m étant toujours égal à l'unité.

Si la limite Λ est telle que l'équation de M. Poincaré ait deux ou plusieurs racines de même module maximum, on démontrera que la fraction continue représente sur tout le plan deux ou plusieurs fonctions convergentes et distinctes.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

40. Considérons les polynomes

$$S_0 = 1, \quad S_1 = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

et réduisons la fraction $\frac{S_2}{S_1}$ en fraction continue en adoptant la forme normale (A).

Il viendra

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_1}{x} + b_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{x} + b_2} + \frac{1}{\frac{a_3}{x} + b_3} + \dots$$

Il s'agit en premier lieu d'exprimer les a_i , b_i en fonction des c_i ⁽¹⁾.

L'établissement de ces formules ne présente aucune difficulté, car il s'agit d'un simple calcul formel; la formule générale s'établit facilement par voie d'induction et l'on démontre ensuite qu'en la supposant vraie pour le rang n elle est également vraie pour le rang $n + 1$.

Toutefois nous arriverons plus rapidement au résultat en utilisant les formules connues pour la transformation de $\frac{S_0}{S_1}$ en une fraction continue de Stieltjes.

Si nous posons

$$S_1 = \frac{x}{A_1} + \frac{x}{A_2} + \frac{x}{A_3} + \frac{x}{A_4} + \dots$$

nous avons les formules connues

$$A_{2p-1} = \frac{(D_2^{p-1})^2}{D_1^{p-1} D_1^p}, \quad A_{2p} = -\frac{(D_1^p)^2}{D_2^{p-1} D_2^p},$$

dans lesquelles

$$D_i^p = \begin{vmatrix} c_i & c_{i+1} & \dots & c_{i+p-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \dots & c_{i+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i+p-1} & c_{i+p} & \dots & c_{i+2p-2} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad D_i^0 = 1.$$

Or, en posant

$$g_n = \frac{1}{A_n A_{n+1}}, \quad g_0 = \frac{1}{A_1},$$

nous avons identiquement

$$S_1 = \frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{1} + \frac{g_2}{x} + \frac{g_3}{1} + \frac{g_4}{x} + \frac{g_5}{1} + \dots$$

⁽¹⁾ STIELTJES, *Op. cit.*, p. 34. — AURIC, *Les équations linéaires et leurs applications*, p. 55.

c'est la forme étudiée par Stieltjes et elle est manifestement égale à

$$S_1 = \frac{g_0}{\frac{1}{x} + g_1} + \frac{g_1 g_2}{\frac{1}{x} + g_2 + g_3} + \frac{g_3 g_4}{\frac{1}{x} + g_4 + g_5} + \frac{g_5 g_6}{\frac{1}{x} + g_6 + g_7} + \dots$$

Dès lors, si nous posons

$$\rho_n = g_{2n} + g_{2n+1} = -\frac{1}{D_2^n} \frac{D_1^{n-1} (D_1^{n+1})^2 + D_2^{n+1} (D_1^n)^2}{D_1^n D_1^{n+1}},$$

$$\sigma_n = \frac{g_{2n-1} g_{2n}}{(D_1^n)^2} = \frac{D_1^{n-1} D_1^{n+1}}{(D_1^n)^2}$$

avec

$$\rho_0 = g_1 = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} = -\frac{D_2^1}{D_1^1}, \quad \sigma_0 = g_0 = \frac{1}{\Lambda_1} = D_1^1,$$

il viendra

$$S_1 = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{x} + \rho_0} + \frac{\sigma_1}{\frac{1}{x} + \rho_1} + \frac{\sigma_2}{\frac{1}{x} + \rho_2} + \dots$$

Il est d'ailleurs possible de simplifier la formule ci-dessus.

Appelons D_i^{p+k} le déterminant D_i^p dans lequel les indices de tous les éléments de la dernière colonne ont été augmentés de k unités.

D'après une propriété bien connue des déterminants mineurs, nous avons les relations

$$D_1^p \quad D_2^{p+1} - D_2^p \quad D_1^{p+1} = D_2^{p-1} D_1^{p+1},$$

$$D_1^{p+1} D_2^{p+1} - D_1^{p+2} D_2^p = D_1^p \quad D_2^{p+1}.$$

Multiplions la première égalité par D_1^{p+1} , la seconde par $-D_1^p$, il vient en ajoutant

$$D_2^{p-1} (D_1^{p+1})^2 + D_2^{p+1} (D_1^p)^2 = D_2^p (D_1^p D_1^{p+2} - D_1^{p+1} D_1^{p+1}),$$

dès lors, en remplaçant dans ρ_n , on a

$$\rho_n = \frac{D_n^n (D_{n+1}^{n+1} D_n^{n+1} - D_{n+1}^n D_{n+1}^{n+2})}{D_n^n D_n^n D_{n+1}^{n+1}} = \frac{D_n^{n+1}}{D_n^n} - \frac{D_{n+1}^{n+2}}{D_{n+1}^{n+1}}.$$

On peut donc, sans inconvénient, faire disparaître l'indice 1 devenu inutile et l'on obtient

$$(35) \quad \rho_n = \frac{D_n^{n+1}}{D_n^n} - \frac{D_{n+1}^{n+2}}{D_{n+1}^{n+1}}, \quad \sigma_n = \frac{D_{n-1}^{n-1} D_{n+1}^{n+1}}{(D_n^n)^2}.$$

Telles sont les formules qui permettent de passer d'une série de Taylor à une fraction continue de la forme normale (A).

41. Posons $\frac{1}{x} = z$ et admettons que

$$\lim \rho_n = R, \quad \lim \sigma_n = S, \quad (n = \infty).$$

Les conditions de convergence de la fraction continue seront les mêmes que celles de la fraction périodique simple limite

$$Y = z + R - \frac{S}{Y},$$

d'où

$$Y = \frac{1}{2}(z + R) \pm \sqrt{(z + R)^2 - 4S}.$$

Les deux points critiques extrêmes sont

$$z', z'' = -R \pm 2\sqrt{S},$$

et la coupure est formée par la ligne droite qui joint ces deux points en passant par $z = -R$.

La formule qui donne ρ_n nous montre immédiatement que, si $\Sigma \rho_n$ est convergente et a une limite, le rapport $\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n}$ tend également vers cette limite et réciproquement; si, au contraire, comme nous l'avons admis ci-dessus, ρ_n tend vers R , on voit que $\frac{1}{n} \frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n}$ tend vers cette même limite.

En ce qui concerne σ_n nous pouvons écrire

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_n \frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}},$$

d'où par récurrence

$$\frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}} = \sigma_{n-1} \frac{D_{n-1}^{n-1}}{D_{n-2}^{n-2}},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\frac{D_2^2}{D_1^1} = \sigma_1, \quad \frac{D_1^1}{D_0^0} = \sigma_1 \sigma_0,$$

et en multipliant

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n,$$

et par le même procédé

$$D_{n+1}^{n+1} = \sigma_0^{n+1} \sigma_1^n \sigma_2^{n-1} \dots \sigma_{n-1}^2 \sigma_n;$$

à la limite on aura donc, si $\lim \sigma_n = S$,

$$\lim D_{n+1}^{n+1} = AS^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Nous savons que, si les σ_n sont tous positifs (φ_n et σ_n étant réels par hypothèse), les équations $Q_n^0 = 0$ ont toutes leurs racines réelles.

Cette simple remarque constitue en somme la démonstration d'un théorème de M. Hurwitz ⁽¹⁾ que nous énoncerons comme il suit :

Pour que les racines de $Q_n^0 = 0$ soient toutes réelles et séparées par celles de $Q_n^1 = 0$, il faut que, si l'on a

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

les déterminants D_n^u soient tous de même signe (et positifs puisque $D_0^0 = 1$) ou alternativement positifs ou négatifs (cas qui se ramène au précédent par le changement de z en $-z$).

42. Considérons la fraction

$$\frac{\sigma_0}{S_1} = \frac{c_1}{c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots} = \frac{1}{x} + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} + \rho_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} + \rho_2} + \dots$$

(1) WEHLER, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 338.

Soit $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ la réduite de rang n et posons $\frac{1}{x} = z$,

$$Q_n^0 = z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \alpha_2 z^{n-3} + \dots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1},$$

$$Q_n^1 = z^{n-2} + \beta_1 z^{n-3} + \beta_2 z^{n-4} + \dots + \beta_{n-1} z + \beta_{n-2}.$$

En écrivant que les développements de $\frac{\sigma_2}{S_1}$ et de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ ont le plus grand nombre de termes communs, on a

$$c_1 = c_1,$$

$$c_1 \beta_1 = c_2 + c_1 \alpha_1,$$

$$c_1 \beta_2 = c_3 + c_2 \alpha_1 + c_1 \alpha_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_1 \beta_{n-2} = c_{n-1} + c_{n-2} \alpha_1 + c_{n-3} \alpha_2 + \dots + c_1 \alpha_{n-2},$$

$$0 = c_n + c_{n-1} \alpha_1 + c_{n-2} \alpha_2 + \dots + c_2 \alpha_{n-2} + c_1 \alpha_{n-1},$$

$$0 = c_{n+1} + c_n \alpha_1 + c_{n-1} \alpha_2 + \dots + c_3 \alpha_{n-2} + c_2 \alpha_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 = c_{2n-2} + c_{2n-3} \alpha_1 + c_{2n-4} \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_{n-2} + c_{n-1} \alpha_{n-1}.$$

Si aux égalités ci-dessus nous ajoutons

$$Q_n^0 = z^{n-1} + z^{n-2} \alpha_1 + z^{n-3} \alpha_2 + \dots + z \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1},$$

on aura en résolvant

$$Q_n^0 = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} & c_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

On trouve facilement

$$\rho_n = -\frac{a}{(a+2n\lambda)[a+2(n+1)\lambda]},$$

$$\sigma_n = -\frac{n\lambda(a+n\lambda)}{[a+(2n-1)\lambda](a+2n\lambda)[a+(2n+1)\lambda]}.$$

Nous avons donc

$$\lim \rho_n = -\frac{a}{4n^2\lambda^2} = 0, \quad \lim \sigma_n = -\frac{n^2}{16n^4\lambda^2} = -\frac{1}{16n^2\lambda^2} = 0.$$

En posant $\frac{1}{x} = z$, le point $z = 0$ est un point essentiel et la coupure se réduit à ce seul point; le développement est donc toujours convergent.

En particulier, faisons $a = 0$, $\lambda = 1$, on aura

$$\rho_n = 0, \quad \sigma_n = -\frac{1}{4(4n^2-1)} = -\frac{1}{4(2n+1)(2n-1)},$$

d'où

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 3}}{\frac{1}{x}} - \frac{\frac{1}{4 \cdot 15}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{4 \cdot 35}}{\frac{1}{x}} - \dots,$$

$$1 + \frac{3}{e^x-1} = \frac{3}{x} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots$$

et, en posant $\frac{2}{x} = z$,

$$\frac{\frac{2}{e^z-1}}{e^z-1} = z + \frac{1}{3z} + \frac{1}{5z} + \frac{1}{7z} + \dots$$

développement qui ne diffère pas au fond de la formule bien connue de Lambert

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh \text{hyp. } x = -i \tanh ix = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots$$

44. Considérons comme second exemple

$$\frac{x}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\dots[a+(k+1)\lambda]} + \frac{x^2}{(a+2\lambda)(a+3\lambda)\dots[a+(k+2)\lambda]} + \dots$$

qui est, en quelque sorte, une logarithmique généralisée.

Par l'application des formules on trouve

$$\rho_n = -\frac{(a+k\lambda)[a+(2n+1)\lambda] + 2n(n+1)\lambda^2}{[a+(k+2n)\lambda][a+(k+2n+2)\lambda]},$$

$$\sigma_n = \frac{n(k+n)\lambda^2(a+n\lambda)[a+(k+n)\lambda]}{[a+(k+2n-1)\lambda][a+(k+2n)\lambda]^2[a+(k+2n+1)\lambda]}.$$

Par suite

$$\lim \rho_n = -\frac{2n^2\lambda^2}{4n^2\lambda^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim \sigma_n = \frac{n^4\lambda^4}{16n^4\lambda^4} = \frac{1}{16}.$$

En posant $\frac{1}{x} = z$ on voit que les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$Y = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{16Y},$$

d'où

$$Y = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{z^2 - z}.$$

Les points critiques sont $z = 0$, $z = +1$, et la coupure est formée par le segment qui les réunit.

En particulier, si $a = 0$, $\lambda = 1$, $k = 0$, ce qui donne

$$-L(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

$$\rho_n = -\frac{2n(n+1)}{4n(n+1)} = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_n = \frac{n^2}{(2n-1)4n^2(2n+1)} = \frac{n^2}{4(1n^2-1)},$$

d'où

$$-\frac{1}{L(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4.3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{4.15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}} + \frac{\frac{9}{4.35}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{7}} - \frac{\frac{16}{4.63}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{9}} + \dots$$

En posant $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = y$, on a la formule connue

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{y} + \frac{1}{3y} + \frac{4}{5y} + \frac{9}{7y} + \frac{16}{9y} + \frac{25}{11y} + \frac{36}{13y} + \dots$$

qui est convergente sur tout le plan, sauf sur la coupure $-1 \dots +1$.

En appliquant le théorème de Cauchy dans les conditions définies précédemment, on a

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{y+z}.$$

Dans le langage de Stieltjes cela signifie que l'on a une répartition continue de masse avec la densité $\frac{1}{2}$ sur le segment $-1 \dots +1$.

Le développement

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

donne, par le même procédé,

$$\text{arc tang } \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z} + \frac{4}{5z} + \frac{9}{7z} + \dots,$$

qui ne diffère du précédent que par le changement de signe; cette analogie, que le développement taylorien ne permettait pas de soupçonner, résulte de la formule bien connue

$$\text{arc tang } y = iL\sqrt{\frac{1-yi}{1+yi}}.$$

Si, dans la formule

$$\text{arc tang } \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z} + \frac{4}{5z} + \frac{9}{7z} + \frac{16}{9z} + \frac{25}{11z} + \dots,$$

nous ramenons tous les numérateurs partiels à l'unité, les dénominateurs partiels seront de la forme

$$\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot n} \right)^2 (4n+1)z$$

et

$$\left(\frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots 2n+1}\right)^2(4n+3)z,$$

et, d'après la formule de Wallis, ils ont respectivement comme limite, pour $n = \infty$,

$$\pi z \quad \text{et} \quad \frac{4z}{\pi}.$$

Or nous avons le développement périodique

$$\frac{\pi}{2}(z \pm \sqrt{z^2+1}) = \pi z + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \dots,$$

et, d'après les propriétés établies au Chapitre IV, on pourra écrire

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z} = \frac{P_0 - I_0 \frac{\pi}{2}(z + \sqrt{z^2+1})}{P_1 - I_1 \frac{\pi}{2}(z + \sqrt{z^2+1})} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1.$$

On aurait de même

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{P_0 - I_0 \frac{\pi}{2}(y + \sqrt{y^2-1})}{P_1 - I_1 \frac{\pi}{2}(y + \sqrt{y^2-1})}.$$

Considérons de même le développement ⁽¹⁾

$$\frac{x}{1+\lambda} + \frac{x^2}{1+2\lambda} + \frac{x^4}{1+3\lambda} + \dots$$

Il suffit de poser, dans le cas général, $a = 1$, $k = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \rho_n &= -\frac{1 + (2n+1)\lambda + 2n(n+1)\lambda^2}{(1+2n\lambda)[1+(2n+2)\lambda]}, \\ \sigma_n &= \frac{n^2\lambda^2(1+n\lambda)^2}{[1+(2n-1)\lambda][1+(2n\lambda)^2][1+(2n+1)\lambda]} \end{aligned}$$

(1) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. II, p. 3.

et, en posant $\frac{1}{x} = z$, on voit que la coupure sera le segment qui va de l'origine au point +1.

43. Comme troisième exemple, soit le développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots,$$

on trouve

$$\rho_n = \frac{m+n}{2(2n+1)} - \frac{m+n-1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_n = -\frac{m^2-n^2}{4(4n^2-1)}.$$

Les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$Y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16Y}.$$

Les points critiques sont ici 0 et -1 et la coupure est formée par le segment qui les réunit. Une transformation facile donne la formule connue ⁽¹⁾

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m = 1 + \frac{2m}{z} + \frac{\frac{m^2-1}{3}}{z} + \frac{\frac{m^2-4}{15}}{z} + \frac{\frac{m^2-9}{35}}{z} + \dots,$$

et la coupure est ici le segment -1...+1.

En appliquant le théorème de Cauchy on voit que, d'un côté de la coupure, la fraction est égale à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{2m\pi i}$$

et, de l'autre, à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{-2m\pi i}$$

et l'on obtient l'intégrale de Stieltjes

$$\Gamma = \frac{\sin 2m\pi}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m \frac{dz}{z+u}.$$

(1) LAGUERRE, C. I, p. 344.

En considérant l'expression $\frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m - 1}{m}$ et en faisant tendre m vers zéro, on trouve que la valeur limite est $L \frac{z+1}{z-1}$, et l'on retombe sur la formule du paragraphe précédent.

De même en posant $z = \frac{y}{m}$ et en faisant tendre m vers l'infini on retrouve la formule du paragraphe 45.

Donnons encore deux développements indiqués par Laguerre (1).

Le premier est celui qui a servi de base aux recherches de Stieltjes

$$e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u} du}{u} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1^2}{x+5} + \frac{1^2}{x+7} + \frac{1^2}{x+9} + \frac{1^2}{x+11} + \dots$$

Nous avons ici

$$\lim \varphi_n = 2n, \quad \lim \tau_n = n^2.$$

La fraction simple limite

$$Y = x + 2n - \frac{n^2}{Y}$$

donne

$$Y = \frac{1}{2} \left[x + 2n \pm \sqrt{x(x+4n)} \right]$$

dont les points critiques sont 0 et $-\infty$.

La coupure s'étend donc sur toute la partie négative de l'axe des x .

De même la fraction continue

$$e^{\arctan \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - x} + \frac{1 + \frac{1}{7}}{-3x} + \frac{1 + \frac{1}{7}}{-5x} + \frac{9 + \frac{1}{4}}{-7x} + \dots$$

(1) *Oeuvres complètes*, t. I, p. 431 et 294.

donne par une transformation facile

$$\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\arctan \frac{1}{x}}{x}} + 1}{e^{\frac{\arctan \frac{1}{x}}{x}} - 1} = x + \frac{1 + \frac{1}{4}}{3x} + \frac{4 + \frac{1}{4}}{5x} + \frac{9 + \frac{1}{4}}{7x} + \dots,$$

et sous cette forme on reconnaît que la coupure s'étend du point $x = -1$ au point $x = +1$ et que la fraction continue est convergente sur tout le plan complexe, sauf sur ce segment.



*Composantes de la force magnétique d'un aimant
ellipsoïdal uniforme;*

PAR M. E. MATHY.

Ces composantes se déduisent de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, dont les formules sont (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{dP}{dx} = \frac{3Mx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \left[\varphi(u + \omega_3) - \gamma_3 + e_3 u \right], \\ -\frac{dP}{dy} = \frac{3My}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \left[\varphi(u + \omega_2) - \gamma_2 + e_2 u \right], \\ -\frac{dP}{dz} = \frac{3Mz}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \left[\varphi(u + \omega_1) - \gamma_1 + e_1 u \right]. \end{cases}$$

Les quantités qui entrent dans ces expressions sont déterminées par les conditions suivantes :

M représente la masse de l'ellipsoïde considéré; (x, y, z) désigne le point extérieur;

Par ce point extérieur, on a fait passer un ellipsoïde homothétique au premier; ses axes principaux (a, b, c) seront connus par

$$(2) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. II, 1896, fasc. III.

quand le point (x, y, z) sera donné;

$$(4) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2), \\ e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + c^2 - 2b^2), \\ e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2); \end{cases}$$

l'argument u , pour $\frac{dP}{dx}$, satisfait à $pu - e_3 = a'^2$, pour $\frac{dP}{dy}$, à $pu - e_2 = b'^2$ et, pour $\frac{dP}{dz}$, à $pu - e_1 = c'^2$; mais ces trois valeurs de u sont égales, en vertu de (2) et de (4); elles permettent d'écrire (3) sous la forme

$$(5) \quad \frac{x^2}{pu - e_3} + \frac{y^2}{pu - e_2} + \frac{z^2}{pu - e_1} = 1.$$

La dérivée $\frac{du}{dx}$ entrant dans les calculs suivants, il est préférable de la chercher séparément; à cet effet, en dérivant (5) par rapport à x , on trouve

$$(6) \quad \frac{2x}{pu - e_3} - p'u \frac{du}{dx} \left[\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2} \right] = 0.$$

Or, si l'on représente par d la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde (5) au point (x, y, z) , on a

$$d^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2}}.$$

Dès lors (6) devient

$$(7) \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x d^2}{(pu - e_3) p' u}.$$

Mais on vient de voir que

$$pu - e_3 = a'^2$$

et que

$$p'u = -2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)} = -2a'b'c';$$

il en résulte

$$(8) \quad \frac{du}{dx} = -\frac{x d^2}{a^3 b' c'}.$$

On obtiendrait de même $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$.

Ces opérations auxiliaires étant terminées, on peut résoudre la question. On examine d'abord le cas de l'aimantation dirigée suivant le grand axe; on sait qu'alors les composantes de la force magnétique sont

$$X_1 = \frac{d^2 P}{dx^2}, \quad Y_1 = \frac{d^2 P}{dx dy}, \quad Z_1 = \frac{d^2 P}{dx dz},$$

quand l'intensité est l'unité. Or, des formules (1), on déduit

$$\begin{aligned} -X_1 = -\frac{d^2 P}{dx^2} &= \frac{3M}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\zeta(u + \omega_3) - \tau_{13} + e_3 u] \\ &+ \frac{3Mx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [-p(u + \omega_3) + e_3] \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

ou

$$-X_1 = 3M \frac{\zeta(u + \omega_3) - \tau_{13} + e_3 u}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} + 3Mx \frac{p(u + \omega_3) - e_3}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \left(-\frac{du}{dx}\right).$$

Mais

$$\frac{p(u + \omega_3) - e_3}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} = \frac{1}{pu - e_3} = \frac{1}{a'^2}.$$

En tenant compte de cette valeur, ainsi que de (8), on a

$$-X_1 = 3M \left[\frac{\zeta(u + \omega_3) - \tau_{13} + e_3 u}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} + \frac{x}{a'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'} \right].$$

Pour les autres composantes, on trouve

$$(9) \quad \begin{cases} -Y_1 = -\frac{d^2 P}{dx dy} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dP}{dy} \right) \\ \quad \quad \quad = \frac{3My}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} [-p(u + \omega_2) + e_2] \frac{du}{dx} \end{cases}$$

ou

$$-Y_1 = 3My \frac{p(u+\omega_2)-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)} \left(-\frac{du}{dx} \right) = 3My \frac{1}{pu-e_2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'};$$

$$-Y_1 = \frac{3My}{b'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'}.$$

De même

$$-Z_1 = \frac{3Mz}{c'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'}.$$

On sait que les signes \pm conviennent à la répulsion ou à l'attraction; on peut réunir les formules et rétablir l'intensité

$$(10) \quad \begin{cases} X_1 = 3Ml \left[\frac{\zeta(u+\omega_1)-\tau_1+e_1 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + \frac{x}{a'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'} \right], \\ Y_1 = 3Ml \frac{y}{b'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'}, \\ Z_1 = 3Ml \frac{z}{c'^2} \frac{x d^2}{a^3 b' c'}. \end{cases}$$

Ces formules pourront servir aux calculs numériques si l'argument u est déterminé. Pour cela, on remarquera que $pu - e_1 = c'^2$ donne $pu > e_1$; comme $k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ est plus petit que 1, u est réel et sa plus petite valeur est

$$(11) \quad u = \pm 2\omega_1 c'.$$

On sait que c' est donné, avec une très grande approximation, par

$$(12) \quad \cos 2av = \frac{\left(1 - \frac{a'}{b'} \sqrt{K}\right)(1 + \sqrt{K})}{(1 - \sqrt{K'}) \left(1 + \frac{a'}{b'} \sqrt{K'}\right)}.$$

Comme

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{K}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

K étant l'intégrale complète elliptique de première espèce calculée par Legendre, correspondant au module k^2 et au module complémentaire

$$k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

on peut obtenir

$$(13) \quad u = \frac{K}{\pi \sqrt{a^2 - c^2}} \arccos \frac{\left(1 - \frac{a'}{b'} \sqrt{k'}\right) (1 + \sqrt{k'})}{(1 - \sqrt{k'}) \left(1 + \frac{a'}{b'} \sqrt{k'}\right)}.$$

Il reste à étudier $\zeta(u + \omega_3) - \tau_{13}$:

Par la formule d'addition

$$\zeta(u + \omega_3) - \tau_{13} = \zeta u + \zeta \omega_3 - \tau_{13} + \frac{1}{2} \frac{p' u - p' \omega_3}{p u - p \omega_3}$$

on

$$(14) \quad \zeta(u + \omega_3) - \tau_{13} = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p' u}{p u - e_3} = \zeta u - \frac{b' c'}{a'}.$$

Enfin, on développe ζu suivant les puissances de u et, retenant les deux premiers termes, on a

$$(15) \quad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{20} \frac{u^3}{3} = \frac{1}{u} + \frac{1}{5} (e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) \frac{u^3}{3}.$$

Les égalités (13), (14), (15) permettent donc d'obtenir les valeurs numériques de (10).

Lorsque l'aimantation a lieu suivant l'un des deux autres axes principaux de l'ellipsoïde, on remarquera que, pour écrire les formules correspondantes, les termes en ζ se rapportent à l'axe de glissement et que les autres termes sont symétriques en x, y, z ($a' b' c'$).

Dans le cas le plus général, celui où l'aimantation a lieu suivant la direction s , à cosinus directeurs (λ, μ, ν) , on fera le raisonnement suivant : P étant le potentiel d'un ellipsoïde de densité 1 au point extérieur, $-\frac{dP}{ds}$ sera le potentiel de la double couche de glissement au même point; or

$$-\frac{dP}{ds} = -\left(\frac{dP}{dx}\lambda + \frac{dP}{dy}\mu + \frac{dP}{dz}\nu\right) = \Omega.$$

Comme

$$\Omega = -\frac{d\Omega}{dx} = \lambda \frac{d^2 P}{dx^2} + \mu \frac{d^2 P}{dx dy} + \nu \frac{d^2 P}{dx dz},$$

on a

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 3\text{MI} \left[\lambda \frac{\zeta(u + \omega_3) - \tau_3 + e_3 u}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} + \frac{x d^2}{a'^3 b' c'} \left(\frac{\lambda x}{a'^2} + \frac{\mu y}{b'^2} + \frac{\nu z}{c'^2} \right) \right], \\ \text{De même} \\ Y_1 = 3\text{MI} \left[\mu \frac{\zeta(u + \omega_2) - \tau_2 + e_2 u}{(e_3 - e_2)(e_1 - e_2)} + \frac{y d^2}{a' b'^3 c'} \left(\frac{\lambda x}{a'^2} + \frac{\mu y}{b'^2} + \frac{\nu z}{c'^2} \right) \right], \\ Z_1 = 3\text{MI} \left[\nu \frac{\zeta(u + \omega_1) - \tau_1 + e_1 u}{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)} + \frac{z d^2}{a' b' c'^3} \left(\frac{\lambda x}{a'^2} + \frac{\mu y}{b'^2} + \frac{\nu z}{c'^2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Il est facile de reconnaître que le facteur

$$\frac{\lambda x}{a'^2} + \frac{\mu y}{b'^2} + \frac{\nu z}{c'^2}$$

est le cosinus que la normale n à l'ellipsoïde (3) au point (x, y, z) fait avec la direction s de l'aimantation, ce cosinus étant divisé par d .

La méthode des calculs numériques est applicable aux formules (16). Quand les ellipsoïdes sont de révolution, les termes en ζ dégèrent en fonctions circulaires ou logarithmiques; ces expressions sont d'ailleurs obtenues directement dans les auteurs classiques. Cependant un calcul immédiat montre que dans le cas de la sphère, lorsque

$$a' = b' = c' = d = r,$$

on a

$$Y_1 = \frac{3\text{MI} y x}{r^3} = 3\text{MI} \frac{\sin \omega \cos \omega}{r^3},$$

ce qui est bien la formule connue.

*Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes
linéaires à moins de sept variables;*

PAR M. CAMILLE JORDAN.

§ I. — Préliminaires.

1. On nomme *groupes abéliens* ceux dont les substitutions sont échangeables entre elles.

Soient G_m, G_n deux groupes abéliens, respectivement contenus dans les groupes linéaires à m et à n variables. La réunion de leurs substitutions donnera un nouveau groupe abélien contenu dans le groupe linéaire à $m + n$ variables. Un groupe ainsi formé sera dit *réductible*.

Nous nous bornerons à l'étude des groupes *irréductibles* et *généraux*, c'est-à-dire qui ne sont contenus comme sous-groupes dans aucun autre groupe de même nature.

2. Soit

$$S = \left| x_i - \sum_k a_{ik} x'_k \right| \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

une substitution quelconque de l'un de ces groupes; son déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

égalé à zéro, n'aura qu'une seule racine s_1 , de l'ordre n de multiplicité.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'il ait deux racines différentes s_1, s_2 ; par un choix convenable de variables indépendantes, on pourra ramener S à une forme canonique, telle que la suivante :

$$\begin{vmatrix} x_1, x'_1, & \dots & s_1 x_1, & s_1 x'_1, & \dots \\ x_2, x'_2, & \dots & s_1(x_2 + x_1), & s_1(x'_2 + x'_1), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1, y'_1, & \dots & s_2 y_1, & s_2 y'_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Une substitution quelconque S_i du groupe G que nous considérons, devant être échangeable à S , devra permuter les unes dans les autres les fonctions linéaires des variables x_1, x'_1, \dots ; car ces fonctions sont les seules que S multiplie par s_1 . Elle permutera de même entre elles les fonctions linéaires de $x_2, x'_2, \dots, x_1, x'_1, \dots$ qui sont les seules que S multiplie par s_1 et accroisse en outre de fonctions linéaires de x_1, x'_1, \dots , et ainsi de suite.

Donc S_i remplace chacune des variables x par une fonction linéaire de ces seules variables. De même pour les variables y ; de sorte que G sera réductible, contrairement à notre hypothèse.

Remarquons d'ailleurs qu'une substitution s_i , qui multiplie toutes les variables par un même facteur arbitraire s_i , est échangeable à toute substitution linéaire. Elle fera donc partie du groupe G supposé général. Et la substitution S sera le produit de la substitution s_i par une nouvelle substitution S' dont le déterminant caractéristique n'a d'autre racine que l'unité.

Le problème est donc ramené à la construction des groupes abéliens G dont toutes les substitutions ont pour déterminant caractéristique une puissance de $s - 1$.

5. Soit S une substitution d'un pareil groupe. En la ramenant à sa forme canonique, on voit qu'il existe certaines variables x, x', \dots qu'elle n'altère pas. Soient y, y', \dots les autres variables.

Soit S_i une seconde substitution du groupe. Elle devra permuter

entre elles les fonctions linéaires de x, x', \dots ; elle sera donc de la forme

$$\begin{vmatrix} x, x' & \dots & f(x, x', \dots), & f_1(x, x', \dots), & \dots \\ y, y' & \dots & \varphi(x, x', \dots, y, y', \dots), & \varphi_1(x, x', \dots, y, y', \dots), & \dots \end{vmatrix}.$$

Considérons la substitution partielle opérée sur les x, x', \dots . Son déterminant caractéristique, entrant en facteur dans celui de S_1 , sera une puissance de $s - 1$. Parmi les fonctions linéaires de x, x', \dots il en existe donc que S_1 n'altère pas.

Soit S_2 une nouvelle substitution de G . Elle devra permuter les unes dans les autres ces fonctions que ni S_1 , ni $S_1 S_2$ n'altèrent, et parmi elles il y en aura que S_2 laisse également invariables.

Il existe donc certaines fonctions inaltérées par toutes les substitutions de G . Prenons-les pour variables indépendantes et désignons-les par x'_1, x''_1, \dots ; nous les appellerons *variables de rang 1*; soit m_1 leur nombre. Désignons par y, y', \dots les variables restantes.

Les substitutions de G seront de la forme générale

$$\begin{vmatrix} x'_1, x''_1, & \dots & x'_1, & & x''_1, & \dots \\ y, y', & \dots & f(y, y', \dots) + \varphi_1(x_1, x'_1, \dots), & f_1(y, y', \dots) + \varphi_1(x_1, x'_1, \dots), & \dots \end{vmatrix}.$$

Pour qu'elles soient échangeables entre elles, il faut évidemment que les substitutions réduites

$$|y, y', \dots \quad f(y, y', \dots), \quad f_1(y, y', \dots), \quad \dots|,$$

obtenues en effaçant les variables x, x', \dots , soient échangeables entre elles. Elles laisseront donc invariables certaines fonctions des y, y', \dots . Soient x'_2, x''_2, \dots celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes; m_2 leur nombre. Ce sont les *variables de rang 2*, et toute substitution de G (si elle les altère) les accroîtra d'une fonction linéaire des variables de rang 1.

Poursuivant ce raisonnement, on arrive au résultat suivant :

THÉOREME. — *Les variables indépendantes étant convenablement*

Ce procédé de tâtonnement donnera bien tous les groupes G , mais au prix de calculs fort longs; de plus, un même groupe pourra se reproduire sous plusieurs formes différentes, dont une seule devra être conservée, si l'on veut éviter les doubles emplois dans l'énumération des groupes G .

Deux des groupes obtenus ne peuvent, en effet, être considérés comme vraiment distincts, s'ils sont identiques, ou peuvent être rendus tels par le changement des variables indépendantes.

Or, si nous convenons de dire qu'une fonction linéaire des variables x_k^i est de rang k , lorsque les variables de rang le plus élevé qui y figurent sont de rang k , il est évident que le groupe Γ sera transformé en lui-même, si l'on remplace chacune des variables x_k^i par une nouvelle variable indépendante du même rang (à la seule condition que les nouvelles variables soient linéairement distinctes).

Soient G l'un des groupes abéliens contenus dans Γ ; G, G', \dots ses divers transformés par les changements de variables ci-dessus; ces groupes ne seront pas distincts et ne devront compter que pour un seul dans l'énumération des groupes cherchés.

Les considérations suivantes permettent d'abrégier les opérations que nous venons d'indiquer et d'obtenir la solution effective du problème dans les cas les plus simples.

§ II. — Considérations générales.

3. Une substitution S du groupe Γ est complètement définie lorsque l'on connaît l'accroissement $\Delta x_k^i = f_{ik}$ qu'elle fait subir à chacune des variables x_k^i . On pourra donc la représenter commodément par la notation

$$S = [\Delta x_1^i = f_{1i}, \dots, \Delta x_h^i = f_{hi}, \dots].$$

On pourra même, pour abrégier l'écriture, supprimer l'indication des variables que S laisserait inaltérées.

Soit

$$\varphi = \sum \gamma_{ik} x_k^i$$

une fonction linéaire des x à coefficients indéterminés; S lui donnera

l'accroissement

$$\Delta\varphi = \Sigma \lambda_{ik} \Delta x_k^i$$

et l'on pourra écrire, sous une forme plus condensée,

$$S = |\Delta\varphi = \Sigma \lambda_{ik} f_{ik}|.$$

Soit S_1 une autre substitution de Γ , qui accroisse φ de $\Delta_1\varphi$. La substitution SS_1 transforme φ en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1(\varphi + \Delta\varphi) = \varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta_1\Delta\varphi.$$

De même S_1S la changera en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta\Delta_1\varphi.$$

La condition pour que S et S_1 soient échangeables est donc exprimée par la relation

$$\Delta_1\Delta\varphi = \Delta\Delta_1\varphi$$

qui doit avoir lieu identiquement, quelle que soit la fonction linéaire φ .

En égalant séparément les coefficients de chacune des arbitraires λ_{ik} dans la relation précédente, on obtiendra celles-ci

$$\Delta_1\Delta x_k^i = \Delta\Delta_1 x_k^i \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m_k \\ k = 1, 2, \dots, r \end{array} \right),$$

dont elle est le résumé.

6. Si deux opérations Δ et Δ_1 peuvent être interverties, comme l'exprime cette égalité, il en sera de même des opérations

$$D = a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 + \dots \quad \text{et} \quad \Delta_1,$$

a_1, a_2, \dots étant des constantes arbitraires. Donc tout groupe abélien G qui contient la substitution S contiendra (s'il est général, comme on le suppose) la substitution Σ qui accroît φ de $D\varphi$. En effet, soit S_1 une substitution quelconque de G ; étant échangeable à S , elle le sera à Σ . Si donc Σ n'appartenait pas à G , on pourrait la lui adjoindre pour former un groupe abélien plus général.

Nous appellerons ces substitutions Σ les *dérivées* de S . En particulier, nous appellerons *multiples* de S celles pour lesquelles l'opération D se réduit à $a_1 \Delta$.

De même, si G contient plusieurs substitutions S, S_1, \dots accroissant respectivement \mathfrak{z} de $\Delta \mathfrak{z}, \Delta_1 \mathfrak{z}, \dots$, il contiendra toutes les substitutions Σ qui l'accroissent de $D \mathfrak{z}$, D désignant un polynôme symbolique arbitraire en Δ, Δ_1, \dots (sans terme constant). Ces substitutions seront dites les *dérivées* de S, S_1, \dots . En particulier, nous appellerons *combinaisons linéaires* de S, S_1, \dots et nous représenterons par

$$(aS + a_1 S_1 + \dots)$$

celles où le polynôme D se réduit à la forme linéaire

$$D = a \Delta + a_1 \Delta_1 + \dots$$

7. Supposons, pour fixer les idées, qu'on connaisse déjà deux substitutions S, S_1 du groupe G . Soit x l'une des variables. Parmi les fonctions linéaires $\Delta x, \Delta_1 x, \Delta^2 x, \Delta \Delta_1 x, \dots$, soient y, y', \dots celles qui sont linéairement distinctes. Prenons-les, ainsi que x , pour variables indépendantes; soient z, z', \dots les variables restantes. Une substitution quelconque S_2 du groupe G donnera à x un accroissement de la forme

$$\Delta_2 x = ay + a'y' + \dots + bz + b'z' + \dots$$

Mais, parmi les substitutions dérivées de S, S_1 , que l'on sait déjà appartenir à G , il en est une σ qui lui donne l'accroissement

$$\hat{\Delta} x = ay + a'y' + \dots$$

On peut substituer à S_2 comme génératrice du groupe la combinaison linéaire

$$(S_2 - \sigma) = S'_2,$$

pour laquelle l'accroissement de x se réduit à

$$\Delta'_2 x = bz + b'z' + \dots$$

C'est donc uniquement parmi les substitutions ainsi réduites qu'il

conviendra de choisir une substitution échangeable à S, S_1 , qu'on puisse leur adjoindre pour continuer la construction progressive de G .

8. Cette condition d'échangeabilité restreindra d'ailleurs beaucoup le champ des hypothèses possibles sur la nature de la nouvelle substitution S'_2 .

Supposons, pour en donner un exemple qui sera utile plus tard, que l'on ait $b = b' = \dots = 0$, de telle sorte que $\Delta'_2 x$ soit nul; $\Delta'_2 y, \Delta'_2 y', \dots$ le seront également. En effet, S'_2 étant échangeable à σ , on aura nécessairement

$$\Delta'_2 \delta x = \delta \Delta'_2 x = 0,$$

car $\Delta'_2 x$ est nul.

Mais, d'autre part,

$$\Delta'_2 \delta x = a \Delta'_2 y + a' \Delta'_2 y' + \dots$$

et, pour que cette expression s'annule, quelles que soient les constantes a, a', \dots , il faudra qu'on ait

$$\Delta'_2 y = 0, \quad \Delta'_2 y' = 0, \quad \dots$$

9. Comme cas particulier du précédent, considérons celui où les variables x, y, y', \dots épuisent le nombre des variables indépendantes; il n'y aura pas de variables z , et S'_2 n'altérant aucune variable se réduira à l'unité. Il n'existera donc aucune substitution nouvelle qu'on puisse adjoindre au groupe dérivé des substitutions S, S_1 déjà connues et ce groupe sera général.

10. Il existe dans le groupe Γ certaines substitutions σ échangeables à toutes les autres et qui, par suite, appartiendront à tous les groupes G contenus dans Γ . Ce sont celles qui n'altèrent aucune variable, sauf celles de rang maximum x'_r, x''_r, \dots , qu'elles accroissent de fonctions arbitraires $\delta x'_r, \delta x''_r, \dots$, des variables de rang 1. Elles accroîtront, en effet, la fonction arbitraire

$$\varphi = \Sigma \lambda_{ik} x$$

de la quantité

$$\delta \varphi = \lambda_{1r} \delta x'_r + \lambda_{2r} \delta x''_r + \dots$$

Soit S une autre substitution de Γ ; elle accroîtra φ d'une fonction $\Delta\varphi$ qui ne contient que des variables de rang $< r$. On aura donc

$$\delta\Delta\varphi = 0.$$

Mais, d'autre part, $\delta\varphi$ étant de rang 1, on aura

$$\Delta\delta\varphi = 0.$$

La condition d'échangeabilité est donc remplie.

On remarquera que le succès de ce raisonnement tient à cette circonstance que x'_r, x''_r, \dots ne figurent pas dans $\Delta\varphi$. Ces variables de rang maximum sont les seules qui jouissent de cette propriété, quelle que soit la fonction φ et de quelque manière que S soit choisie dans le groupe Γ .

Mais si la substitution S doit être choisie, non plus dans toute l'étendue du groupe Γ , mais dans un de ses sous-groupes Γ_i , il peut arriver que certaines variables, de rang $< r$, ne figurent pourtant pas dans les $\Delta\varphi$. Les substitutions σ'_i , qui n'altèrent que ces variables, en les accroissant de fonctions arbitraires des variables de rang 1, seront échangeables à toutes celles de Γ_i ; elles appartiendront donc à tout groupe abélien G contenu dans Γ_i , et supposé général.

II. Soit x_k l'une des variables de rang k . Les diverses substitutions S, S_1, \dots du groupe G lui donneront des accroissements $\Delta x_k, \Delta_1 x_k, \dots$ de rang $k-1$ *au plus*. Mais l'un au moins d'entre eux sera effectivement de rang $k-1$. Autrement ce serait à tort qu'on aurait inscrit x_k comme variable de rang k ; elle serait, en réalité, de rang inférieur.

Nous allons établir que G contient une substitution S pour laquelle $\Delta x_k, \Delta^2 x_k, \dots, \Delta^{k-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1, k-2, \dots, 1$.

Supposons, en effet, qu'on ait trouvé déjà une substitution S pour laquelle $\Delta x_k, \dots, \Delta^{l-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1, \dots, k-l+1$, mais où $\Delta^l x_k$ soit de rang $< k-l$.

Puisque $\Delta^{l-1} x_k$ est de rang $k-l+1$, G contiendra une substitution S_1 qui l'accroît d'une fonction de rang $k-l-1$.

Soient $\Delta\varphi$, $\Delta_i\varphi$ les accroissements que S, S_i donnent à la fonction arbitraire φ ; G contiendra la combinaison linéaire

$$\Sigma = (S + \varepsilon S_i),$$

ε étant un infiniment petit. Cette substitution accroît φ de

$$D\varphi = (\Delta + \varepsilon \Delta_i)\varphi.$$

Répétant cette opération, on aura

$$D'\varphi = (\Delta + \varepsilon \Delta_i)'\varphi$$

et, en particulier,

$$D'x_k = (\Delta + \varepsilon \Delta_i)'x_k = (\Delta' + l\varepsilon \Delta_i \Delta'^{-1} + \dots)x_k.$$

Or, par hypothèse, $\Delta'x_k$ est de rang $< k - l$ et $\Delta_i \Delta'^{-1}x_k$ de rang $k - l$; les termes non écrits peuvent être du même rang; mais, étant infiniment petits par rapport aux précédents, ils ne peuvent les détruire. Donc $D'x_k$ aura le rang $k - l$ et $D'x_k, D'^{-1}x_k, \dots, x_k$ étant de rangs croissants, dont le dernier est k , leurs rangs respectifs seront bien $k - l, k - l + 1, \dots, k$.

Soit S la substitution dont nous venons d'établir l'existence. Désignons par x_k, x_{k-1}, \dots, x_1 les fonctions $x_k, \Delta x_k, \dots, \Delta^{k-1}x_k$. Étant de rangs décroissants, elles seront linéairement distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes. La substitution S prendra, en ce qui concerne ces variables, la forme suivante :

$$\Delta x_k = x_{k-1}, \quad \Delta x_{k-1} = x_{k-2}, \quad \dots, \quad \Delta x_1 = 0.$$

12. Soient S, S_i deux substitutions d'un groupe G de signature $[m_1, m_2, \dots, m_r]$. Nous avons trouvé pour exprimer leur échangeabilité les conditions suivantes (n° 3) :

$$\Delta_i \Delta'_k = \Delta \Delta'_k \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m_k \\ k = 1, 2, \dots, r \end{array} \right).$$

Si nous nous bornons à considérer celles de ces identités où $k \leq r$, elles exprimeront que les substitutions effectuées sur les variables

des ρ premiers rangs seulement sont échangeables. L'ensemble de ces substitutions partielles (correspondant aux diverses substitutions S, S_1, \dots du groupe G) formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \dots, m_\rho]$; mais ce groupe pourra ne pas être général dans son espèce.

On peut même négliger, parmi celles des identités où $k = \rho$, toutes celles où $i > \mu$, μ étant un entier moindre que m_ρ ; les identités restantes exprimeront l'échangeabilité des substitutions partielles opérées sur les variables de rang $< \rho$ et les μ premières variables de rang ρ . L'ensemble de ces substitutions partielles formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \dots, m_{\rho-1}, \mu]$, mais qui pourra ne pas être général.

Parmi les conditions conservées jusqu'à présent, effaçons encore toutes celles où $k < \sigma$ et, dans celles qui subsistent, supprimons dans les deux membres les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les conditions ainsi restreintes expriment que les altérations produites par S, S_1, \dots sur les variables des rangs $\sigma, \dots, \rho - 1$ et les μ premières variables de rang ρ seraient échangeables si l'on y biffait les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les substitutions restreintes ainsi obtenues formeront encore un groupe abélien, de signature $[m_\sigma, \dots, m_{\rho-1}]$.

On voit par là que la détermination des groupes abéliens généraux de signatures simples, telles que $[m_1, m_2], [m_1, m_2, m_3], \dots$ et de leurs divers sous-groupes constituerait un premier pas assez important vers la solution du problème général relatif à une signature quelconque $[m_1, m_2, \dots]$.

15. Avant de passer aux applications particulières des principes ci-dessus, il convient encore de remarquer qu'il existe certaines signatures auxquelles ne correspond aucun groupe G . Nous allons montrer, par exemple, l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$.

Supposons, en effet, qu'il existe un groupe G ayant cette signature; soient x_2 la variable de rang 2, x_3, x'_3 celles de rang 3. Une substitution quelconque S du groupe G donnera à x_3, x'_3 des accroissements de la forme

$$\Delta x_3 = a x_2 + R_1, \quad \Delta x'_3 = a' x_2 + R_1,$$

en désignant, d'une façon générale, par R_1 une fonction des variables de rang 1, qu'il est inutile de préciser et qui ne sera pas partout la même.

La variable x_3 étant de rang 3, G contient au moins une substitution S où a n'est pas nul et, si nous changeons de variables, en posant

$$x_3 = aX_3, \quad a'x_3 - a.x'_3 = X'_3,$$

nous aurons plus simplement

$$\Delta X_3 = x_2 + R_1, \quad \Delta X'_3 = R_1.$$

Les substitutions de G seront des combinaisons linéaires de celle-là avec d'autres substitutions S_1, \dots donnant à X_3, X'_3 des accroissements de la forme

$$\Delta_1 X_3 = R_1, \quad \Delta_1 x'_3 = b.x_2 + R_1.$$

Mais, X'_3 étant une variable de rang 3, il existe au moins une substitution S_1 pour laquelle b n'est pas nul, et, comme on peut remplacer la substitution S_1 par un de ses multiples, il est permis de supposer $b = 1$.

Les substitutions de G seront évidemment des combinaisons linéaires de S, S_1 avec d'autres substitutions Σ pour lesquelles les accroissements de X_3, X'_3 se réduiront à la forme

$$DX_3 = R_1, \quad DX'_3 = R_1.$$

Cela posé, aucune des substitutions S, S_1, Σ ne pourra altérer x_2 . Soit, en effet, Δx_2 l'accroissement que lui donne S ; on aura

$$\Delta_1 \Delta X_3 = \Delta_1(x_2 + R_1) = \Delta_1 x_2$$

et, d'autre part,

$$\Delta \Delta_1 X_3 = \Delta R_1 = 0.$$

Donc $\Delta_1 x_2 = 0$.

On trouvera de même

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta X'_3 &= \Delta_1 R_1 = 0, & \Delta \Delta_1 X'_3 &= \Delta(x_2 + R_1) = \Delta x_2, \\ \Delta_1 DX'_3 &= \Delta_1 R_1 = 0, & D\Delta_1 X'_3 &= D(x_2 + R_1) = Dx_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta x_2 = 0, \quad D x_2 = 0.$$

Donc x_2 , n'étant altérée par aucune des substitutions dont G est dérivé, est une variable de rang 1 et non de rang 2, comme on l'avait supposé, de sorte que la signature du groupe n'est pas $[m_1, 1, 2]$, mais $[m_1 + 1, 2]$.

14. De l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$, qui vient d'être établie, résulte évidemment (n° 12) celle de toute signature de la forme $[m_1, \dots, m_{k-1}, 1, m_{k+1}, \dots, m_r]$, où l'un des nombres m_{k+1}, \dots, m_r serait plus grand que l'unité.

§ III. — Applications.

1° *Groupe de signature* $[m, n]$.

15. Les substitutions de Γ ne sont autres que les substitutions σ du numéro 10. Le groupe G , qui doit les contenir toutes, n'est autre que Γ lui-même.

Ses substitutions sont des combinaisons linéaires de mn substitutions distinctes dont chacune laisse inaltérées toutes les variables, sauf l'une de celles de rang 2, x'_2, \dots, x''_2 , qu'elle accroît de l'une des variables de rang 1, x'_1, \dots, x''_1 .

16. Un sous-groupe \mathcal{G} contenu dans G sera dit d'espèce p , si toutes ses substitutions sont des combinaisons linéaires de p substitutions distinctes S_1, \dots, S_p .

Une quelconque S_i de ces substitutions accroîtra une quelconque des variables de rang 2, telle que x_2^h , d'une certaine fonction linéaire φ_{ih} des variables de rang 1.

La substitution générale de \mathcal{G} , $(\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_p S_p)$, donnera donc à la fonction générale de rang 2

$$\begin{aligned} & \mu_1 x'_2 + \dots + \mu_n x''_2, \\ \text{l'accroissement} & \\ D(\mu_1 x'_2 + \dots + \mu_n x''_2) = \sum \lambda_i \sum \mu_k \varphi_{ik} & \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, p, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \end{aligned}$$

Le second membre est une fonction trilinéaire par rapport aux trois séries de variables λ, μ, x . On dispose pour la réduire à une forme canonique des opérations suivantes :

- 1° Une substitution linéaire arbitraire opérée sur les x_i ;
- 2° Une substitution linéaire opérée sur les μ ;
- 3° Une substitution linéaire opérée sur les λ .

Ces deux dernières opérations altéreraient les expressions

$$\begin{aligned} \mu_1 x'_2 + \dots + \mu_n x'_2, \\ \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_p S_p. \end{aligned}$$

Mais on les ramènera à leur forme initiale en exécutant les substitutions inverses des précédentes sur les x_2 et sur les S ; opérations permises, car on peut changer, d'une part, les variables indépendantes, et, d'autre part, remplacer S_1, \dots, S_p comme génératrices du groupe g par p de leurs combinaisons linéaires.

On aura donc autant de sous-groupes g de l'espèce p qu'il existe de formes réduites distinctes pour la fonction trilinéaire

$$\sum \sum \lambda_i \mu_k \varphi_{ik}.$$

La construction de ces réduites est un problème assez complexe; nous l'avons abordé dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403 et 1907, p. 5) et nous en avons donné la solution : 1° dans le cas où l'un des nombres m, n, p est égal à 1 ou à 2; 2° dans celui où

$$m = n = p = 3.$$

2° Groupe de signature $[m, 1, 1, 1, \dots, 1]$.

17. Soit x_r la variable unique de rang maximum r . Le groupe cherché G contient (n° 11) une substitution S pour laquelle on a

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \quad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \quad \dots, \quad \Delta x_1 = 0,$$

x_{r-1}, \dots, x_1 étant des variables de rangs $r-1, \dots, 1$.

Soient x'_1, x''_1, \dots les $m-1$ autres variables de rang 1; G contiendra, en outre (n° 10), les substitutions σ qui accroissent x_r d'une fonc-

tion linéaire de x'_1, x''_1, \dots , sans altérer aucune des autres variables.

Les substitutions dérivées de S et des σ donneront aux diverses variables des accroissements de la forme suivante :

$$\begin{aligned} Dx_r &= a_1 x_{r-1} + a_2 x_{r-2} + a_3 x_{r-3} + \dots + a_{r-1} x_1 + b_1 x'_1 + b_2 x''_1 + \dots, \\ Dx_{r-1} &= a_1 x_{r-2} + a_2 x_{r-3} + \dots + a_{r-2} x_1, \\ Dx_{r-2} &= a_1 x_{r-3} + \dots + a_{r-3} x_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ Dx_1 &= Dx'_1 = Dx''_1 = \dots = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients a, b peuvent prendre toutes les valeurs possibles.

Ces substitutions, permettant d'accroître x_r d'une fonction linéaire quelconque des autres variables, épuiseront toutes celles du groupe cherché (n° 9).

On n'a donc ici encore qu'*un seul* groupe G de la signature demandée.

3° Groupes de signature $[m, n, 1]$.

18. Soient x_3 la variable unique de rang 3; x'_2, \dots, x''_2 celles de rang 2; x'_1, \dots, x''_1 celles de rang 1.

G contient les substitutions σ du numéro **10** et résulte (n° 7) de leur combinaison avec des substitutions S_1, S_2, \dots pour lesquelles on a simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3 &= \varphi_1, & \Delta_1 x_2^h &= f_{1h}, \\ \Delta_2 x_3 &= \varphi_2, & \Delta_2 x_2^h &= f_{2h}, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

les φ étant des fonctions de x'_2, \dots, x''_2 (qui ne sont pas toutes nulles) et les f des fonctions de x'_1, \dots, x''_1 .

Supposons que parmi les fonctions φ il y en ait l linéairement distinctes. En les prenant pour variables indépendantes, nous aurons l substitutions S_1, \dots, S_l , telles que, pour l'une quelconque d'entre elles S_i , on ait les accroissements

$$\Delta_i x_3 = x_2^i, \quad \Delta_i x_2^h = f_{ih} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, l \\ h = 1, 2, \dots, n \end{array} \right).$$

G résultera de la combinaison de σ, S_1, \dots, S_l avec d'autres substitutions σ' qui laissent invariable x_3 et, par suite, $x'_1, \dots, x'_m, x'_2, \dots, x'_2$ (8). Si donc l était égal à n , les substitutions σ' se réduiraient à la seule substitution 1, et la construction de G s'arrêterait là. ▀

Supposons, au contraire, $l < n$ pour rester dans l'hypothèse la plus générale. Les substitutions σ' accroîtront x_2^{l+1}, \dots, x_2^n de fonctions linéaires $\psi_{l+1}, \dots, \psi_n$ des variables de rang 1. D'ailleurs, quelles que soient ces fonctions ψ_i, \dots, σ' sera échangeable aux substitutions σ, S_1, \dots, S_l (10). Donc G sera dérivé des substitutions $\sigma, S_1, \dots, S_l, \sigma'$.

Mais, en combinant les σ' avec S_1, \dots, S_l , on pourra simplifier l'expression de ces dernières substitutions en les remplaçant par d'autres substitutions génératrices S'_1, \dots, S'_l , pour lesquelles toutes celles des fonctions f_{ik} où $k > l$ soient nulles.

Le groupe G sera ainsi dérivé des substitutions σ' et d'un groupe G' de substitutions d'où les variables x_2^{l+1}, \dots, x_2^n ont disparu. Ce dernier groupe, de signature $[m, l, 1]$, sera dérivé des substitutions σ , jointes à des substitutions S'_1, \dots, S'_l de la forme suivante :

$$S'_i = |\Delta_i x_3 = x_2^i, \Delta_i x_2^k = f_{ik}| \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, l \\ k = 1, 2, \dots, l \end{array} \right).$$

19. Nous n'avons pas encore exprimé que ces substitutions S' sont échangeables deux à deux. Cette condition donne les relations

$$\Delta_i \Delta_k x_3 = \Delta_k \Delta_i x_3,$$

d'où

$$f_{ik} = f_{ki}.$$

Les f se réduiront donc à $\frac{l(l+1)}{2}$ fonctions distinctes, contenant chacune m coefficients arbitraires. Mais le nombre de ces paramètres peut être réduit par un choix convenable des variables indépendantes et des substitutions génératrices.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_l S_l),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont des indéterminées. Elle accroîtra x_3 de la quantité

$$Dx_3 = \lambda_1 x'_2 + \dots + \lambda_l x'_2$$

et x'_2 de la quantité

$$Dx'_2 = \lambda_1 f_{1k} + \dots + \lambda_l f_{lk} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_k},$$

ψ désignant la forme quadratique

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_k f_{ik} \lambda_i \lambda_k.$$

D'ailleurs, les f_{ik} étant des fonctions linéaires des m variables x'_1, \dots, x'_m , on aura, en les mettant en évidence,

$$\psi = x'_1 \psi_1 + \dots + x'_m \psi_m,$$

ψ_1, \dots, ψ_m étant des fonctions quadratiques des λ .

Soient enfin μ_1, \dots, μ_l de nouvelles indéterminées; on aura

$$D(\mu_1 x'_2 + \dots + \mu_l x'_2) = \sum_k \mu_k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_k} = \sum_i x'_i \sum_k \mu_k \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_k}.$$

Le second membre de cette égalité est un covariant de la forme ψ (une polaire), lorsqu'on y soumet les deux séries de variables λ et μ à la même substitution. On peut le faire sans altérer les expressions

$$\begin{aligned} \lambda_1 x'_2 + \dots + \lambda_l x'_2, & \quad \mu_1 x'_2 + \dots + \mu_l x'_2, \\ \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_l S_l, & \end{aligned}$$

pourvu qu'on opère la substitution inverse sur les x_2 et sur les S .

On aura donc après cette transformation

$$(1) \quad \begin{cases} Dx_3 = \lambda_1 x'_2 + \dots + \lambda_l x'_2, \\ D(\mu_1 x'_2 + \dots + \mu_l x'_2) = \sum_k \mu_k \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_k} = \sum_i x'_i \sum_k \mu_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda_k}. \end{cases}$$

Ψ, Ψ_i désignant les transformées de ψ, ψ_i par la substitution opérée sur les λ . D'ailleurs, on peut soumettre également les x_i à une substi-

tution linéaire quelconque. On voit donc que le problème de construire les groupes G' revient à déterminer les formes canoniques distinctes à l'une desquelles peut être ramené le réseau

$$\psi = x'_1 \psi_1 + \dots + x'_m \psi_m$$

dérivé de m formes quadratiques à l variables.

En effet, si la forme réduite Ψ est connue, on n'aura qu'à remplacer D par sa valeur $\lambda_1 \Delta_1 + \dots + \lambda_p \Delta_p$ dans les relations (1) et à égaler les coefficients des indéterminées λ et μ dans les deux membres pour obtenir explicitement toutes les quantités $\Delta_i x_3$, $\Delta_i x_2^k$ et connaître, par suite, les substitutions S_i .

20. Parmi les types réduits Ψ , il en existe dans lesquels quelques-unes des variables x_i ou des variables λ ont disparu.

Soit N_{ml} le nombre des réduites restantes qui contiennent toutes les variables. Le nombre total des réduites possibles sera évidemment

$$\sum_i \sum_k N_{ik} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, l \end{matrix} \right)$$

et celui des réduites où figurent tous les λ , avec tout ou partie des x_i , sera

$$\sum_i N_{il} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ces dernières réduites sont, d'ailleurs, les seules auxquelles correspondent des groupes G' ayant la signature demandée. En effet, si l'on suppose que l'une des variables λ , telle que λ_k , ne figure pas dans Ψ , on aura, d'après les relations (1), $Dx_2^k = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_k} = 0$, d'où

$$\Delta_1 x_2^k = \Delta_2 x_2^k = \dots = 0$$

et la variable x_2^k , inaltérée par toute substitution de G' , ne serait pas de rang 2, mais de rang 1.

Le nombre des groupes G' correspondant à une valeur donnée de l

sera donc

$$\sum_i N_{il}.$$

Chacun d'eux concourt à la formation d'un groupe G. D'ailleurs, l peut prendre successivement toutes les valeurs de 1 à n .

Le nombre total des groupes G de signature $[m, n, 1]$ sera donc

$$(2) \quad \sum_l \sum_i N_{il} \quad \left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \dots, m \\ l = 1, 2, \dots, n \end{array} \right).$$

21. Pour la détermination de ces nombres N, nous renverrons au Mémoire déjà cité (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403), auquel nous empruntons les résultats suivants :

$$N_{il} = 0, \quad \text{si} \quad i > \frac{l(l+1)}{2},$$

$$N_{il} = 1, \quad \text{si} \quad i = \frac{l(l+1)}{2},$$

$$N_{il} = 1,$$

$$N_{21} = 0, \quad N_{22} = 2, \quad N_{23} = 6, \quad N_{24} = 14,$$

$$N_{33} = 13, \quad N_{43} = 8, \quad N_{53} = 5, \quad N_{63} = 1.$$

On en déduit aisément, par la formule (2), le Tableau suivant du nombre des groupes G pour toutes les valeurs de n qui ne surpassent pas 3 :

$m =$	1	2	3	4	5	$m > 5$
$n = 1$	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	2	4	5	5	5	5
$n = 3$	3	11	15	33	38	39

4^e Groupes de signature $[1, n, 1, 1, \dots, 1]$.

22. Soit x_r la variable de rang maximum; G contiendra (11), outre les substitutions σ du n° 10, une substitution S, pour laquelle on aura

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \quad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \quad \dots, \quad \Delta x_1 = 0,$$

x_r, x_{r-1}, \dots, x_1 étant de rang $r, r-1, \dots, 1$ et pouvant être choisies comme variables indépendantes.

Soient x'_2, \dots, x_2^{n-1} les variables de rang 2, autres que x_2 ; S leur donnera des accroissements de la forme

$$\Delta x'_2 = a' x_1, \quad \Delta x''_2 = a'' x_1, \quad \dots$$

Mais on annulera ces accroissements si l'on prend pour variables

$$x'_2 - a' x_1, \quad x''_2 - a'' x_1, \quad \dots$$

Nous pouvons donc supposer qu'on ait

$$\Delta x'_2 = 0, \quad \Delta x''_2 = 0 \quad \dots$$

Cela posé, G résultera (7) de la combinaison des substitutions σ, S avec d'autres substitutions S_1, S_2, \dots qui donnent respectivement à x_r des accroissements

$$\Delta_1 x_r = \varphi_1, \quad \Delta_2 x_r = \varphi_2, \quad \dots,$$

les φ étant des fonctions des seules variables x'_2, x''_2, \dots , en nombre $n-1$.

Supposons que, parmi ces fonctions, il y en ait l linéairement distinctes (l pourra être égal à l'un des nombres 0, 1, $\dots, n-1$). En les prenant pour variables indépendantes, on aura simplement, pour les substitutions S_1, \dots, S_l ,

$$\Delta_1 x_r = x'_2, \quad \Delta_2 x_r = x''_2, \quad \dots, \quad \Delta_l x_r = x^l_2.$$

Ces substitutions n'altéreront d'ailleurs aucune des variables x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 . On a, en effet, par exemple,

$$\Delta_1 x_{r-k} = \Delta_1 \Delta^k x_r = \Delta^k \Delta_1 x_r = \Delta^k x'_2 = 0.$$

Quant aux variables x'_2, \dots, x^l_2 elles leur donneront des accroissements de la forme

$$\Delta_i x^k_2 = a_{ik} x_1.$$

Cela posé, le groupe G sera dérivé de la combinaison des substitu-

tions $\sigma, S, S_1, \dots, S_l$ avec d'autres substitutions σ' qui laissent inaltéré x_r et, par suite, $x_{r-1}, \dots, x_1, x'_2, \dots, x'_2$ (8). Quant à x_2^{l+1}, \dots, x_2^a , elles les accroîtront de multiples de x_1 . Quels que soient ces multiples, la substitution σ' appartiendra à G (10).

Le groupe G sera donc dérivé des substitutions $\sigma, \sigma', S, S_1, \dots, S_l$. En combinant ces dernières substitutions avec les σ' , on obtiendra des substitutions génératrices plus simples S'_1, \dots, S'_l , où ceux des $\Delta_i x_2^k$, pour lesquels $k > l$ seront tous nuls.

Après cette simplification, les substitutions $\sigma, S'_1, \dots, S'_l$ ne contiendront plus les variables x_2^{l+1}, \dots, x_2^a et formeront un groupe abélien G' , de signature $[1, l+1, 1, 1, \dots]$, dont la combinaison, avec les substitutions σ' , donnera G .

25. Les substitutions S'_1, \dots, S'_l sont de la forme

$$S'_i = | \Delta_i x_r = x_2^i, \Delta_i x_2^k = a_{ik} x_i | \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, l \\ k = 1, 2, \dots, l \end{array} \right).$$

Elles sont échangeables deux à deux, ce qui donne les relations

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

La réduction à la forme canonique du groupe G' peut s'effectuer comme au n° 19.

La substitution

$$(\lambda_1 S'_1 + \dots + \lambda_l S'_l)$$

donne, en effet, à x_r l'accroissement

$$Dx_r = \lambda_1 x_2^1 + \dots + \lambda_l x_2^l$$

et à la fonction linéaire

$$\mu_1 x_2^1 + \dots + \mu_l x_2^l$$

l'accroissement

$$D(\mu_1 x_2^1 + \dots + \mu_l x_2^l) = x_1 \sum \mu_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

ψ désignant la forme quadratique

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \lambda_i \lambda_k$$

En opérant sur les indéterminées λ et μ une même substitution linéaire et la substitution inverse sur les x_2 et sur les S' , on n'altérera pas les expressions

$$\lambda_1 S'_1 + \dots + \lambda_l S'_l,$$

$$\lambda_1 x'_2 + \dots + \lambda_l x'_2,$$

$$\mu_1 x'_2 + \dots + \mu_l x'_2,$$

mais on transformera ψ en une somme de carrés

$$\psi = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_l^2)$$

contenant nécessairement toutes les variables λ (voir le n° 20) et sa polaire

$$\sum \mu_k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_k}$$

en

$$\sum \mu_k \lambda_k.$$

Cette forme canonique étant unique, on voit qu'à chaque valeur de l correspond un seul groupe G et partant un seul groupe G . Mais on peut assigner successivement à l les valeurs 0, 1, ..., $n-1$.

Il existe donc n groupes G ayant pour signature $[1, n, 1, 1, \dots]$.

5° Groupes de signature $[1, m, n]$.

24. Il faut supposer ici m et n plus grands que l'unité; car, pour $n=1$, on retomberait sur des cas déjà traités, et, pour $m=1$, $n>1$, le groupe G ne saurait exister (14).

Soient $x_1; x'_2, \dots, x''_2; x'_3, \dots, x''_3$ les variables.

Le groupe G sera dérivé des substitutions σ , combinées à d'autres substitutions que, d'après le n° 7, on peut supposer réduites à la

forme

$$S = | \Delta x'_3 = \varphi_l, \Delta x'_2 = a_k x_l, \Delta x_l = 0 | \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, m \\ l = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

les φ étant des fonctions des seules variables x'_2, \dots, x'_m .

Parmi les substitutions de cette forme que G doit contenir, il en est une au moins S_1 où a_1 n'est pas nul. Autrement x_2 ne serait pas de rang 2.

En prenant, d'ailleurs, pour variables indépendantes,

$$\frac{1}{a_1} x'_2, \quad a_2 x'_2 - a_1 x''_2, \quad \dots,$$

au lieu de x'_2, x''_2, \dots , on rendra a_1 égal à l'unité et l'on fera disparaître a_2, \dots, a_m , de sorte que S_1 aura la forme

$$S_1 = | \Delta x'_3 = \varphi_l, \Delta_1 x'_2 = x_l, \Delta_1 x'_k = 0 \text{ (pour } k > 1), \Delta_1 x_l = 0 |,$$

et G résultera de la combinaison des substitutions σ, S_1 avec de nouvelles substitutions de l'espèce S, mais dans lesquelles on pourra supposer $a_1 = 0$.

Parmi ces nouvelles substitutions, il en est au moins une S_2 où a_2 n'est pas nul, et, par un changement de variables analogue au précédent, on la ramènera à la forme

$$S_2 = | \Delta_2 x'_3 = \varphi_{2l}, \Delta_2 x''_2 = x_l, \Delta_2 x'_k = 0 \text{ (si } k \geq 2), \Delta_2 x_l = 0 |.$$

Continuant ainsi, on voit que G contiendra, outre les σ , m substitutions S_1, \dots, S_m ayant les formes suivantes :

$$S_i = | \Delta_i x'_3 = \varphi_{il}, \Delta_i x'_2 = x_l, \Delta_i x'_k = 0 \text{ (si } k < i), \Delta_i x_l = 0 |,$$

les φ_{il} étant des fonctions des x_2 , telles que

$$\varphi_{il} = a'_{i1} x'_2 + \dots + a'_{im} x''_2.$$

Le groupe cherché G sera, d'ailleurs, dérivé des seules substitutions σ, S_1, \dots, S_m , car les substitutions qu'on aurait à lui adjoindre

pour le compléter pourraient être supposées de la forme

$$S = [\Delta x_3^l = \varphi_l, \Delta x_2^l = 0, \Delta x_1 = 0].$$

Mais les fonctions φ_l devraient être toutes nulles.

Soit, en effet,

$$\varphi_l = a'_1 x_2' + \dots + a'_m x_2^m;$$

S étant échangeable à S_i , on aura

$$\Delta \Delta_i x_3^l = \Delta_i \Delta x_3^l.$$

Mais le premier membre est égal à

$$\Delta \varphi_{il} = 0,$$

car φ_{il} ne contient que les variables de rang 2; quant au second membre, il est égal à

$$\Delta_i (a'_1 x_2' + \dots + a'_m x_2^m) = a'_i x_1.$$

Donc $a'_i = 0$, quels que soient i, l . Les substitutions S se réduiront donc à la seule substitution 1 qui appartient déjà à G .

23. Les substitutions S_1, \dots, S_m doivent être échangeables deux à deux; d'où les conditions

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_k \Delta_i x_3^l.$$

Mais

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_i [a'_{k1} x_2' + \dots + a'_{km} x_2^m] = a'_{ki} x_1$$

$$\Delta_k \Delta_i x_3^l = a'_{ik} x_1.$$

Donc

$$a'_{ik} = a'_{ki}.$$

On pourra écrire en conséquence

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \varphi_l(x_2', \dots, x_2^m)}{\partial x_2^l},$$

φ_l désignant la forme quadratique

$$\varphi_l = \sum_{i,k} a'_{ik} x_2^i x_2^k \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, m \end{array} \right).$$

La substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_m S_m)$$

donnera à chacune des variables x_2^i un accroissement

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1,$$

et à la fonction

$$\mu_1 x_3' + \dots + \mu_n x_3''$$

l'accroissement

$$\begin{aligned} D(\mu_1 x_3' + \dots + \mu_n x_3'') &= \sum_l \mu_l \sum_i \lambda_i \frac{\partial \psi_l(x_2', \dots, x_2'')}{\partial x_2^i} \\ &= \sum_l \mu_l \sum_i x_2^i \frac{\partial \psi_l(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la polaire par rapport aux x_2 de la fonction

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \psi_l(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

L'expression du groupe G étant ainsi trouvée, il est aisé de la réduire à une forme canonique, en changeant les variables indépendantes et les substitutions génératrices.

Opérons, en effet, sur les λ une substitution linéaire quelconque, en soumettant les x_2 à la même substitution et les S à la substitution inverse. Opérons, d'autre part, sur les μ une substitution linéaire quelconque et sur les x_3 la substitution inverse. Ni $\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_m S_m$, ni $\mu_1 x_3' + \dots + \mu_n x_3''$ ne seront changés, et les relations

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1$$

subsisteront; mais la fonction f sera changée en une autre fonction

$$F = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \Psi_l(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

et l'on aura

$$D(\mu_1 x_3' + \dots + \mu_n x_3'') = \sum_l \mu_l \sum_i x_2^i \frac{\partial \Psi_l}{\partial \lambda_i}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au problème déjà rencontré au n° 19 :

Déterminer les types canoniques distincts à l'un desquels doit se ramener un réseau

$$\mu_1 \psi_1 + \dots + \mu_n \psi_n$$

dérivé de n formes quadratiques des m variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, lorsqu'on opère des substitutions linéaires sur les variables λ et sur les paramètres μ .

26. Le nombre de ces types est

$$\sum_{i,k} N_{ik} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

les nombres N étant les mêmes qu'aux nos **20-21**. Mais ceux de ces types où $k < n$ doivent être rejetés, les groupes G correspondants n'ayant pas la signature requise.

En effet, si k était $< n$, l'une au moins des variables μ , telle que μ_k , ne figurerait plus dans l'expression de F , ni par suite dans sa polaire. Celle-ci étant égale à

$$D(\mu_1 x'_3 + \dots + \mu_n x''_3),$$

on aurait identiquement

$$Dx'_3 = 0.$$

Donc toute substitution de G laisserait x'_3 invariable, sauf les substitutions σ_7 qui lui donnent un accroissement de rang 1. Donc x'_3 serait de rang 2 et non de rang 3, comme cela doit être.

Le nombre des groupes G , de signature $[1, m, n]$, sera donc

$$\sum_i N_{in} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

D'après les valeurs des nombres N , données au n° 21, on pourra former aisément le Tableau suivant du nombre des groupes G pour les

valeurs de n qui ne surpassent pas 3 :

$m =$	1	2	3	4	5	$m > 5$
$n = 1$	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	1	3	4	4	4	4
$n = 3$	1	7	20	28	33	34

6° Groupes de signature $[2, 2, 1, 1, \dots]$.

27. Soient x_r la variable de rang maximum; $x_{r-1}, \dots, x_2, x'_2; x_1, x'_1$ celles de rang $r-1, \dots, 2, 1$.

Le groupe G doit contenir, outre les substitutions σ , une autre substitution S de la forme

$$S = [\Delta x_r = x_{r-1}, \quad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \quad \dots, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x'_2 = ax_1 + bx'_1, \quad \Delta x'_1 = 0].$$

Pour achever de le construire on devra combiner avec les substitutions précédentes de nouvelles substitutions S_1 pour lesquelles $\Delta_1 x_r$ se réduise à la forme cx'_2 (7). Comme S_1 est échangeable à S, on aura ensuite

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_{r-1} &= \Delta_1 \Delta x_r = \Delta \Delta_1 x_r = \Delta cx'_2 = c(ax_1 + bx'_1), \\ \Delta_1 x_{r-2} &= \Delta_1 \Delta^2 x_r = \Delta^2 \Delta_1 x_r = \Delta^2 cx'_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Enfin $\Delta_1 x'_2, \Delta_1 x'_1$ seront de la forme

$$\Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1, \quad \Delta_1 x'_1 = 0.$$

La forme générale des substitutions S_1 sera donc

$$(3) \quad S_1 = [\Delta_1 x_r = cx'_2, \Delta_1 x_{r-1} = c(ax_1 + bx'_1), \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1,$$

les autres Δ_1 étant tous nuls.

Celles des substitutions de cette forme où $c = 0$ sont toutes échangeables entre elles. En les adjoignant simultanément aux substitutions σ et S, on obtiendra donc un premier groupe abélien. Ce sera l'un des groupes G que nous voulons construire, car il est général.

Cherchons, en effet, à le compléter par une nouvelle substitution S_2 . Celle-ci devrait être de la forme (3), et, comme on peut la remplacer par une de ses combinaisons avec les substitutions déjà contenues dans G , on peut supposer que les coefficients α, β, γ sont nuls. Donc S_2 se réduira à la forme

$$S_2 = [\Delta_2 x_r = c x'_2, \Delta_2 x_{r-1} = c(ax_1 + bx'_1), \Delta_2 x'_2 = 0].$$

Elle est, d'ailleurs, échangeable à la substitution

$$S_1 = [\Delta_1 x_r = 0, \Delta_1 x_{r-1} = 0, \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1],$$

laquelle est contenue dans G , quels que soient α et β . On aura donc

$$\Delta_1 \Delta_2 x_r = \Delta_2 \Delta_1 x_r.$$

Mais le premier membre est égal à $c(\alpha x_1 + \beta x'_1)$, le second à 0; donc $c = 0$ et S_2 se réduit à l'unité.

28. Nous obtiendrons d'autres groupes G en adjoignant à σ, S une substitution S_1 où c ne soit pas nul. On peut le supposer égal à 1, car on pourrait remplacer S_1 par $\frac{1}{c} S_1$ comme génératrice du groupe. D'ailleurs, la construction du groupe sera achevée après l'adjonction de S_1 ; car les nouvelles substitutions qu'on pourrait essayer de lui ajouter devraient laisser invariable x_r et, par suite, $x_{r-1}, \dots, x'_2, x_1, x'_1$. Elles se réduiraient donc à l'unité.

Le nouveau groupe que nous venons d'obtenir contient quatre paramètres a, b, α, β ; mais un changement de variables va nous en débarrasser :

1^o Supposons d'abord $b = 0$. En prenant pour variable $x'_2 = ax_2$ au lieu de x'_2 on fera disparaître a . Si β n'est pas nul, on prendra pour variable $\alpha x_1 + \beta x'_1$ au lieu de x'_1 . On obtiendra ainsi un *second* groupe G , dérivé des σ, S , joint aux deux substitutions

$$S = [\Delta x_r = x_{r-1}, \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \dots, \Delta x_1 = \Delta x'_2 = \Delta x_1 = 0],$$

$$S_1 = [\Delta_1 x_r = x'_2, \Delta_1 x_{r-1} = 0, \dots, \Delta_1 x_1 = 0, \Delta_1 x'_2 = x'_1, \Delta_1 x'_1 = 0].$$

Si β était nul, $\Delta_1 x'_2$ ne serait pas égal à x'_1 , mais à zx_1 ; z n'est pas nul, car x'_2 , étant de rang 2, ne peut pas rester invariable par toute substitution du groupe. On le réduira à l'unité en changeant

$$x'_2, S_1 \quad \text{en} \quad x'_2 \sqrt{z}, \quad \frac{S_1}{\sqrt{z}}.$$

On a ainsi un *troisième* groupe, où la substitution S_1 a la forme

$$S_1 = [\Delta_1 x_r = x'_2, \Delta_1 x_{r-1} = 0, \dots, \Delta_1 x_1 = 0, \Delta_1 x'_2 = x_1, \Delta_1 x'_1 = 0].$$

29. 2^o. Soit, au contraire, $b \geq 0$. Prenons pour variable $ax_1 + bx'_1$, au lieu de x'_1 ; S et S_1 seront respectivement réduits aux formes suivantes :

$$S = [\Delta x_r = x_{r-1}, \dots, \Delta x_1 = 0, \Delta x'_2 = x'_1, \Delta x'_1 = 0],$$

$$S_1 = [\Delta_1 x_r = x'_2, \Delta_1 x_{r-1} = x'_1, \dots, \Delta_1 x'_2 = zx_1 + \beta x'_1, \Delta_1 x'_1 = 0].$$

Il est permis de supposer $\beta = 0$, car, s'il en était autrement, on pourrait, par un changement de variables et de substitutions génératrices, ramener ce cas à ceux déjà traités.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda S + S_1) = S'.$$

Elle donne aux variables les accroissements suivants :

$$Dx_r = \lambda x_{r-1} + x'_2, \quad Dx_{r-1} = \lambda x_{r-2} + x'_1, \quad Dx_{r-2} = \lambda x_{r-3}, \quad \dots,$$

$$Dx'_2 = zx_1 + (\beta + \lambda)x'_1, \quad \dots$$

On en déduit

$$D^2 x_r = \lambda(\lambda x_{r-2} + x'_1) + zx_1 + (\beta + \lambda)x'_1 = \lambda^2 x_{r-2} + zx_1 + (\beta + 2\lambda)x'_1,$$

$$D^3 x_r = \lambda^3 x_{r-3}, \quad \dots, \quad D^{r-1} x_r = \lambda^{r-1} x_1.$$

Prenant donc pour variables nouvelles

$$\Lambda_r = x_r, \quad \Lambda_{r-1} = D\Lambda_r, \quad \Lambda_i = D^{r-i}\Lambda_r,$$

au lieu de x_r, x_{r-1}, \dots, x_1 , la substitution S' prendra la forme

$$S' = \begin{vmatrix} DX_r = X_{r-1}, & DX_{r-1} = X_{r-2}, \dots, & DX_1 = 0 \\ Dx'_2 = \alpha \lambda^{1-r} X_1 + (\beta + \lambda) \cdot x'_1, & & Dx'_1 = 0 \end{vmatrix},$$

semblable à celle qu'avait tout à l'heure la substitution S ; mais le coefficient analogue à b est ici $\beta + \lambda$ et l'indétermination de λ permet de l'annuler.

Soit donc $\beta = 0$; si α n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 en changeant x'_2, x'_1, S_1 en $\sqrt{\alpha} x'_2, \sqrt{\alpha} x'_1, \frac{S_1}{\sqrt{\alpha}}$.

Nous obtenons ainsi deux nouveaux groupes en supposant successivement $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$ dans les formules précédentes.

Il y a donc en tout *cinq* groupes G de signature $[2, 2, 1, 1, 1, \dots]$.

7° Groupes de signature $[1, 2, 2, 1]$.

50. Soient $x_1, x'_3, x''_3, x'_2, x''_2, x_1$ les variables.

On voit, comme au n° 24, que G contient nécessairement, outre les σ , deux autres substitutions S_1, S_2 donnant respectivement à x'_2, x''_2 les accroissements suivants :

$$\begin{array}{lll} S_1, & \Delta_1 x'_2 = x_1, & \Delta_1 x''_2 = 0, \\ S_2, & \Delta_2 x'_2 = 0, & \Delta_2 x''_2 = x_1. \end{array}$$

Quant à x'_3, x''_3 , leurs accroissements seront de la forme

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 x'_3 = \varphi_{11} + \alpha_{11} x_1, & \Delta_1 x''_3 = \varphi_{12} + \alpha_{12} x_1, \\ \Delta_2 x'_3 = \varphi_{21} + \alpha_{21} x_1, & \Delta_2 x''_3 = \varphi_{22} + \alpha_{22} x_1, \end{array}$$

les φ étant des fonctions linéaires de x'_2, x''_2 , telles que

$$\varphi_{ik} = a'_{ik} x'_2 + a''_{ik} x''_2.$$

Les substitutions S_1, S_2 devront être échangeables; on en déduit, comme au n° 25,

$$a'_{ik} = a'_{ki}, \quad a''_{ik} = a''_{ki}.$$

Si donc on négligeait les termes en x_1 , on pourrait écrire, comme au n° 23,

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_3^i} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2 \\ l = 1, 2 \end{array} \right),$$

les ψ étant des formes quadratiques en x_1', x_2'' .

Par un changement convenable des variables et des substitutions génératrices, on pourra transformer les deux fonctions ψ , de telle sorte que

$$\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2$$

représente l'un des deux types réduits

$$\frac{1}{2}(\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2''^2)$$

ou

$$\frac{1}{2}(\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2' x_2''),$$

dont est susceptible un faisceau de deux formes binaires. Nous aurons donc à discuter successivement deux hypothèses distinctes :

51. Première hypothèse : $\psi_1 = \frac{1}{2}x_2'^2$, $\psi_2 = \frac{1}{2}x_2''^2$. — Rétablissant dans les expressions $\Delta_i x_3^l$ les termes en x_1 que nous avons négligés, il viendra

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3^i &= x_2^i + \alpha_{11} x_1, & \Delta_1 x_3'' &= \alpha_{12} x_1, \\ \Delta_2 x_3^i &= \alpha_{21} x_1, & \Delta_2 x_3'' &= x_2'' + \alpha_{22} x_1. \end{aligned}$$

Mais on peut faire disparaître ces termes en x_1 en prenant pour variables, au lieu de x_3^i , x_3'' , les suivantes :

$$x_3^i - \alpha_{11} x_2^i - \alpha_{21} x_2'', \quad x_3'' - \alpha_{12} x_2^i - \alpha_{22} x_2''.$$

On aura donc simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3^i &= x_2^i, & \Delta_1 x_3'' &= 0, \\ \Delta_2 x_3^i &= 0, & \Delta_2 x_3'' &= x_2''. \end{aligned}$$

Passons à l'examen de $\Delta_1 x_1$, $\Delta_2 x_4$. Ils sont de la forme

$$\begin{aligned}\Delta_1 x_1 &= a_1 x'_1 + b_1 x''_1 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1, \\ \Delta_2 x_4 &= b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2 + c_2 x''_2 + e_2 x_1.\end{aligned}$$

Mais on peut supposer c_1 , c_2 , e_1 , e_2 nuls; car on les ferait disparaître en prenant pour variable

$$x_1 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2$$

au lieu de x_1 .

Soit donc

$$\Delta_1 x_1 = a_1 x'_1 + b_1 x''_1 + d_1 x'_2, \quad \Delta_2 x_4 = b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2.$$

On doit avoir l'identité

$$\Delta_1 \Delta_2 x_1 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$b_2 x'_2 + d_2 x_1 = b_1 x''_2 + d_1 x_1.$$

Donc $b_1 = b_2 = 0$, et $d_1 = d_2$; et $\Delta_1 x_1$, $\Delta_2 x_4$ se réduisent à

$$\Delta_1 x_1 = a_1 x'_1 + d x''_2, \quad \Delta_2 x_4 = a_2 x''_3 + d x'_2.$$

Posons enfin, μ , $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ étant des indéterminées,

$$\begin{aligned}x_1 &= \mu X_1, & x'_1 &= \mu \tilde{\lambda}_1 X'_1, & x''_1 &= \mu \tilde{\lambda}_2 X''_2, \\ x'_3 &= \mu \tilde{\lambda}_1^2 X'_3, & x''_3 &= \mu \tilde{\lambda}_2^2 X''_3, \\ S'_1 &= \tilde{\lambda}_1 S_1, & S'_2 &= \tilde{\lambda}_2 S_2.\end{aligned}$$

Les substitutions S'_1 , S'_2 donneront aux nouvelles variables les accroissements suivants :

$$\begin{aligned}\Delta_1 X_2 &= X_1, & \Delta'_1 X_2 &= 0, & \Delta_1 X'_3 &= X'_1, & \Delta'_1 X'_3 &= 0, & \Delta'_1 x_4 &= a_1 \mu \tilde{\lambda}_1^3 X'_1 + d \mu \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 X''_2, \\ \Delta_2 X_2 &= 0, & \Delta'_2 X_2 &= X_1, & \Delta_2 X'_3 &= 0, & \Delta'_2 X'_3 &= X''_2, & \Delta'_2 x_4 &= a_2 \mu \tilde{\lambda}_2^3 X''_2 + d \mu \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 X''_2.\end{aligned}$$

On voit que ces Δ' ont la même forme que les Δ précédents, sauf que a_1 , a_2 , d y sont multipliés par les facteurs indéterminés $\mu \tilde{\lambda}_1^3$, $\mu \tilde{\lambda}_2^3$, $\mu \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2$ (qui toutefois ne peuvent pas être nuls). Grâce à cette transfor-

mation, on peut admettre que chacun des coefficients a_1, a_2, d se réduit à 0 ou à 1.

On peut d'ailleurs rejeter l'hypothèse $a_1 = 0$. En effet, si $a_1 = a_2 = 0$, $\Delta_1 x_4$ et $\Delta_2 x_4$ seraient de rang 2 au plus. Mais x_4 est de rang 4. Donc G devrait contenir, outre S_1, S_2 et les σ , une autre substitution Σ qui accroisse x_4 d'une fonction de rang 3, telle que

$$Dx_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \dots,$$

α et β ne pouvant être nuls à la fois. Mais une semblable substitution ne peut être échangeable à S_1 et à S_2 . On aura, en effet,

$$\Delta_1 Dx_4 = \alpha x'_2 + \dots, \quad \Delta_2 Dx_4 = \beta x''_2 + \dots,$$

et l'une au moins de ces expressions est de rang 2, puisque α ou β est ≥ 0 . Mais elles devraient être égales respectivement à $D\Delta_1 x_4, D\Delta_2 x_4$, qui sont de rang < 2 , puisque $\Delta_1 x_4, \Delta_2 x_4$ sont de rang < 3 . Il y a donc contradiction.

Si, d'autre part, on avait $a_1 = 0$, mais $a_2 \geq 0$, il suffirait de permuter x'_2, x'_3, S_1 avec x''_2, x''_3, S_2 pour échanger a_1 et a_2 et ramener ainsi ce cas à celui où $a_1 \geq 0$, mais $a_2 = 0$.

Admettant donc que a_1 est égal à l'unité, il reste les quatre hypothèses suivantes :

$$a_2 = 1, \quad d = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad a_2 = 0, \quad d = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Chacune d'elles nous fournit un groupe abélien. Mais ils ne seront généraux que s'il est impossible de les compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions qui soient échangeables à σ, S_1, S_2 sans en être dérivées.

52. Cette impossibilité est manifeste, d'après le n° 9, si $a_2 = 1$, car les $\Delta_1 x_4, \Delta_2 x_4, \Delta_1 \Delta_2 x_4, \dots$ forment un système de fonctions distinctes en nombre égal à celui des variables $x'_3, x''_3, x'_2, x''_2, x_4$.

On arrivera au même résultat si $a_2 = 0, d = 0$. On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{bmatrix} \Delta_1 x_4 = x'_3, & \Delta_1 x'_3 = x'_2, & \Delta_1 x''_3 = 0, & \Delta_1 x'_2 = x'_1, & \Delta_1 x'_1 = 0, & \Delta_1 x_4 = 0 \end{bmatrix}, \\ S_2 &= \begin{bmatrix} \Delta_2 x_4 = 0, & \Delta_2 x'_3 = 0, & \Delta_2 x'_2 = x_2, & \Delta_2 x''_2 = 0, & \Delta_2 x'_1 = x_1, & \Delta_2 x_4 = 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Toute substitution Σ échangeable à S_1 et à S_2 , devant permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_2 n'altère pas, devra donner à x_4 un accroissement de la forme

$$Dx_4 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

En la combinant avec les dérivées de S_1 , on en déduit une nouvelle substitution Σ' qui laisse inaltéré x_4 et, par suite, x'_3, x'_2, x_1 . D'ailleurs elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_1 n'altère pas. L'accroissement qu'elle donne à x'_3 sera donc de la forme

$$D'x'_3 = a'x''_2 + b'x_1.$$

En la combinant avec les dérivées de S_2 , on obtient une dernière substitution Σ'' qui n'altère plus aucune variable et se réduit à l'unité.

Donc Σ n'est pas une substitution nouvelle, mais est dérivée de S_1, S_2 .

55. Reste à examiner le dernier cas, où $a_2 = 0, d = 1$. Les substitutions S_1, S_2 auront les formes suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 = & \left[\begin{array}{llll} \Delta_1 x_4 = x'_3 + x''_2, & \Delta_1 x'_3 = x'_2, & \Delta_1 x'_2 = x_1, & \Delta_1 x''_3 = \Delta_1 x'_2 = \Delta_1 x_1 = 0 \end{array} \right], \\ S_2 = & \left[\begin{array}{llll} \Delta_2 x_4 = x'_2, & \Delta_2 x''_3 = x'_2, & \Delta_2 x'_2 = x_1, & \Delta_2 x'_3 = \Delta_2 x'_2 = \Delta_2 x_1 = 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Cherchons à leur adjoindre une troisième substitution Σ qui leur soit échangeable. Elle donnera à x_4 un accroissement Dx_4 , dont on pourra faire disparaître les termes en x'_3, x'_2, x_1 en remplaçant, s'il est nécessaire, Σ par une de ses combinaisons avec les dérivées de S_1, S_2 . Soit donc

$$Dx_4 = ax''_3 + bx''_2.$$

Les conditions d'échangeabilité donnent

$$\Delta_1^2 Dx_4 = D\Delta_1^2 x_1, \quad \Delta_2 Dx_4 = D\Delta_2 x_1.$$

Mais

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 Dx_4 &= 0, & D\Delta_1^2 x_4 &= D'x'_2, \\ \Delta_2 Dx_4 &= ax''_2 + bx_1, & D\Delta_2 x_4 &= Dx'_2. \end{aligned}$$

On en déduit $a = 0$, $b = 0$, d'où $Dx_1 = 0$ et, par suite (n° 8),

$$Dx_4 = 0, \quad D(x'_3 + x''_2) = 0, \quad Dx'_2 = 0, \quad Dx_1 = 0.$$

Mais Dx''_2 est de la forme cx_1 ; Dx'_3 sera égal à $-cx_1$; enfin Dx''_3 sera de la forme

$$Dx''_3 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \gamma x_1$$

et, comme parmi les dérivées de S_2 figure une substitution qui accroît x''_3 de γx_1 sans altérer les autres variables, on peut supposer $\gamma = 0$.

Les conditions d'échangeabilité de la substitution Σ ainsi définie seront satisfaites d'elles-mêmes, sauf celles-ci :

$$\Delta_1 Dx''_3 = D\Delta_1 x''_3, \quad \Delta_2 Dx''_3 = D\Delta_2 x''_3$$

qui donneront respectivement $\alpha = 0$ et $\beta = c$.

Les substitutions cherchées Σ seront donc des multiples de la seule substitution

$$S_3 = [Dx_4 = 0, \quad Dx'_3 = -x_1, \quad Dx''_3 = x''_2, \quad Dx'_2 = 0, \quad Dx''_2 = x_1, \quad Dx_1 = 0]$$

qui devra être adjointe à S_1 , S_2 pour obtenir le groupe général G relatif à ce cas.

54. Deuxième hypothèse : $\psi_1 = \frac{1}{2}x_2^2$, $\psi_2 = x'_2x''_2$. — On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \Delta_1 x'_3 &= x'_2 + \alpha_{11}x_1, & \Delta_1 x''_3 &= x''_2 + \alpha_{12}x_1, \\ \Delta_2 x'_3 &= \alpha_{21}x'_1, & \Delta_2 x''_3 &= x'_2 + \alpha_{22}x'_1. \end{aligned}$$

Mais on peut supposer nuls les termes en x_1 ; car, s'ils existaient, on les ferait disparaître en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - \alpha_{11}x'_2 - \alpha_{21}x''_2, \quad X_3 = x'_3 - \alpha_{12}x'_2 - \alpha_{22}x'_2.$$

Il est donc permis d'admettre qu'on ait plus simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_1 &= 0, & \Delta_1 x'_2 &= x'_1, & \Delta_1 x'_2 &= 0, & \Delta_1 x'_3 &= x'_2, & \Delta_1 x''_3 &= x'_2, \\ \Delta_2 x_1 &= 0, & \Delta_2 x'_2 &= 0, & \Delta_2 x'_2 &= x'_1, & \Delta_2 x'_3 &= 0, & \Delta_2 x''_3 &= x'_2; \end{aligned}$$

quant à $\Delta_1 x_3$, $\Delta_2 x_3$, ils seront de la forme

$$\Delta_1 x_3 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1,$$

$$\Delta_2 x_3 = a_2 x'_3 + b_2 x''_3 + c_2 x'_2 + d_2 x''_2 + e_2 x_1.$$

Mais on pourra faire disparaître de ces expressions les termes en x_1 et en x_2 en prenant, s'il y a lieu, pour nouvelle variable

$$X_3 = x_3 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2.$$

Soit donc $c_1 = c_2 = e_1 = e_2 = 0$. On aura, en outre, S_1 et S_2 devant être échangeables,

$$\Delta_1 \Delta_2 x_4 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$a_2 x'_2 + b_2 x''_2 = b_1 x'_2 + d_1 x''_2.$$

Donc $b_1 = a_2$, $b_2 = 0$, $d_1 = 0$, de sorte que $\Delta_1 x_3$, $\Delta_2 x_4$ se réduiront aux formes suivantes :

$$\Delta_1 x_4 = a x'_3 + b x''_3, \quad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d x''_3.$$

53. D'ailleurs a et b ne peuvent être nuls à la fois. En effet, on aurait dans cette hypothèse $\Delta_1 x_4 = 0$. Soit alors Σ une substitution quelconque de G ,

$$Dx_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \dots,$$

l'accroissement qu'elle donne à x_4 ; on aura

$$D\Delta_1 x_4 = 0, \quad \Delta_1 Dx_4 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \dots,$$

d'où $\alpha = \beta = 0$. Donc x_4 ne serait pas une variable de rang 4.

Mais, d'autre part, on peut admettre que l'un des deux coefficients α , b est nul. Supposons, en effet, qu'aucun des deux ne le soit. Prenons pour variables, au lieu de x''_2 , x''_3 , celles-ci

$$X'_2 = x''_2 - \lambda x'_2, \quad X''_3 = x''_3 - 2\lambda x'_3,$$

il viendra

$$\Delta_1 X'_2 = -\lambda x_1, \quad \Delta_1 X''_3 = x''_2 - 2\lambda x'_2 = X'_2 - \lambda x'_2,$$

$$\Delta_1 x_3 = (a + 2b\lambda) x'_3 + b X''_3,$$

$$\Delta_2 X'_2 = x_1, \quad \Delta_2 X''_3 = x'_2, \quad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d(X'_2 + \lambda x'_2).$$

Prenons pour substitution génératrice, au lieu de S_1 , la suivante :

$$S'_1 = (S_1 + \lambda S_2).$$

Elle donnera aux variables les accroissements suivants :

$$\begin{aligned} \Delta'_1 x_1 &= 0, & \Delta'_1 x'_2 &= x_1, & \Delta'_1 x'_3 &= x'_2, \\ \Delta'_1 x_4 &= (a + 3b\lambda) x'_3 + bX''_3 + \lambda d(X''_2 + \lambda x'_2), \end{aligned}$$

$$\Delta'_1 X''_2 = 0, \quad \Delta'_1 X''_3 = X''_2.$$

Posons encore

$$X_4 = x_4 - \lambda^2 dx'_3 - \lambda dX''_3,$$

on aura

$$\Delta'_1 X_4 = (a + 3b\lambda) x'_3 + bX''_3, \quad \Delta_2 X_4 = bx'_3 + dX''_2.$$

Les substitutions S'_1, S_2 auront donc, par rapport aux nouvelles variables $x_1, x'_2, x'_3, X''_2, X''_3, X_4$, la même forme qu'avaient S_1, S_2 par rapport à $x_1, x'_2, x'_3, x''_2, x''_3, x_4$, sauf que le coefficient a est remplacé par $a + 3b\lambda$. On peut disposer de l'indétermination de λ pour l'annuler.

56. Il est d'ailleurs aisé de rendre égaux à l'unité ceux des coefficients a, b, d qui ne sont pas nuls. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu X_1, & x'_2 &= \mu\lambda X'_2, & x'_3 &= \mu\lambda^2 X'_3, & x_4 &= X_4, \\ x''_2 &= \mu\lambda X''_2, & x''_3 &= \mu\lambda^2 X''_3, \\ S'_1 &= \lambda S_1, & S'_2 &= \lambda S_2. \end{aligned}$$

Les nouvelles substitutions génératrices S'_1, S'_2 auront, par rapport aux nouvelles variables X , la même forme que S_1, S_2 par rapport aux x , sauf que d sera multiplié par $\mu\lambda^2$ et celui des coefficients a, b qui n'est pas nul par $\mu\lambda^3$, facteurs non nuls, mais d'ailleurs arbitraires.

Nous aurons donc finalement *quatre* combinaisons possibles :

$$\begin{aligned} a = 1, & \quad b = 0, & \begin{cases} d = 0, \\ d = 1; \end{cases} \\ a = 0, & \quad b = 1, & \begin{cases} d = 0, \\ d = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

auxquelles correspondent autant de groupes abéliens, qu'on devra toutefois compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions, s'il en existe qui soient échangeables à S_1 et S_2 sans en être dérivées.

57. 1° Les deux groupes pour lesquels $b = 1$ sont déjà complets (n° 9); car les fonctions $x_1, \Delta_1 x_1, \Delta_2 x_1, \dots, \Delta_1^i \Delta_2^k x_1$ reproduisent par leur combinaison une fonction quelconque des variables.

2° Passons au cas où $a = 1, b = d = 0$.

Toute substitution Σ échangeable à S_1 et à S_2 doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_2 n'altère pas. Elle donnera donc à x_1 un accroissement de la forme

$$Dx_1 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

Mais tout accroissement de cette forme peut être donné à x_1 par une substitution dérivée de S_1 , nous pouvons donc supposer

$$Dx_1 = 0$$

et, par suite (n° 6),

$$Dx'_3 = Dx'_2 = Dx_1 = 0.$$

Quant à x'_3, x'_2 , leurs accroissements seront de la forme

$$Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x'_2 + \gamma x_1, \quad Dx'_2 = \delta x_1.$$

Les conditions d'échangeabilité de Σ avec S_1 donneront $\alpha = \delta$; celles d'échangeabilité avec S_2 donnent $\beta = 0$. Les substitutions Σ ont donc pour forme générale

$$[Dx'_3 = \alpha x'_2 + \gamma x_1, Dx'_2 = \alpha x_1].$$

Ce sont les dérivées de la substitution unique

$$S_3 = [Dx'_3 = x'_2, Dx'_2 = x_1]$$

qu'il faudra adjoindre à S_1, S_2 pour obtenir le groupe G .

3° Soit enfin $a = 1, b = 0, d = 1$; d'où $\Delta_2 x_1 = x'_2$. Les dérivées de S_1, S_2 permettent d'accroître x_1 d'une autre variable quelconque, sauf x'_3 . On peut donc admettre que les nouvelles substitutions Σ à

adjoindre à S_1, S_2 lui donnent un accroissement

$$Dx_i = \alpha x_3''.$$

On aura, d'ailleurs,

$$Dx_3' - D\Delta_1 x_i = \Delta_1 Dx_i = \alpha \Delta_1 x_3'' = \alpha x_2'',$$

$$Dx_2' = D\Delta_1^2 x_i = \Delta_1^2 Dx_i = \Delta_1^2 x_3'' = 0;$$

Dx_3'' sera de la forme

$$Dx_3'' = \beta x_2' + \gamma x_2'' + \delta x_1$$

et l'on en déduit

$$Dx_2'' = D\Delta_1 x_3'' = \Delta_1 Dx_3'' = \beta x_1.$$

On a, en outre,

$$D\Delta_2 x_i = Dx_2'' = \beta x_1, \quad \Delta_2 Dx_i = \alpha x_2', \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 0,$$

$$D\Delta_2 x_3'' = Dx_2' = 0, \quad \Delta_2 Dx_3'' = \gamma x_1, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 0.$$

Les substitutions Σ laisseront donc toutes les variables inaltérées, sauf x_3'' , qu'elles accroîtront de δx_1 . Elles se réduisent donc aux multiples de la seule substitution

$$S_3 = [Dx_3'' = x_1],$$

dont l'adjonction à S_1, S_2 donnera le groupe G .

En résumé, notre analyse nous a fourni *huit* groupes de signature $[1, 2, 2, 1]$.

8° *Groupes de signature* $[1, 2, 2, 1, 1, \dots]$.

58. Ces groupes contiennent, outre les substitutions σ , une autre substitution S_1 pour laquelle on a

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_r &= x_{r-1}, & \Delta_1 x_{r-1} &= x_{r-2}, & \dots, \\ \Delta_1 x_3 &= x_2, & \Delta_1 x_2 &= x_1, & \Delta_1 x_1 &= 0, \\ \Delta_1 x_3' &= ax_2' + bx_2 + cx_1, & \Delta_1 x_2' &= dx_1. \end{aligned}$$

D'ailleurs, en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - bx_3 - cx_2, \quad X'_2 = x'_2 - dx_2,$$

on fera disparaître b, c, d ; puis, si a n'est pas nul, on le réduira à l'unité en prenant aX'_2 pour variable. On aura donc finalement, soit

$$\Delta_1 x'_3 = 0, \quad \Delta_1 x'_2 = 0,$$

soit

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = 0.$$

Disons successivement ces deux cas.

59. Première hypothèse : $\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 x'_2 = 0$. — Le groupe cherché résulte de la combinaison de S_1 avec d'autres substitutions Σ pour lesquelles on a

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2$$

et, par suite,

$$Dx_{r-1} = D\Delta_1 x_r = \Delta_1 Dx_r = 0, \quad Dx_{r-2} = 0, \quad \dots, \quad Dx_1 = 0.$$

Enfin Dx'_3, Dx'_2 seront de la forme

$$Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \quad Dx'_2 = \delta x_1.$$

La condition

$$\Delta_1 Dx'_3 = D\Delta_1 x'_3$$

montre que β est nul. D'autre part, x'_3 étant une variable de rang 3, G contient au moins une substitution S_2 de l'espèce Σ où α ne soit pas nul.

Soit, pour cette substitution,

$$\Delta_2 x'_3 = \alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1, \quad \Delta_2 x'_2 = \delta_2 x_1.$$

On peut admettre que δ_2 n'est pas nul, car, s'il l'était, x'_2 étant de rang 2, G devrait contenir une nouvelle substitution S_3 d'espèce Σ et

pour laquelle on aurait

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha_3 x'_2 + \gamma_3 x_1, \quad \Delta_3 x'_2 = \delta_3 x_1 \quad (\delta_3 \geq 0).$$

Il contiendrait donc la substitution $(S_2 + \lambda S_3) = S'$, pour laquelle on a

$$\Delta' x'_3 = (\alpha_2 + \lambda \alpha_3) x'_2 + (\gamma_2 + \lambda \gamma_3) x_1, \quad \Delta' x'_2 = (\delta_2 + \lambda \delta_3) x_1.$$

Or on peut choisir λ de telle sorte que ni $\alpha_2 + \lambda \alpha_3$, ni $\delta_2 + \lambda \delta_3$ ne soit nul.

Supposons donc $\alpha_2 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$. Posant

$$\alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1 = \alpha_2 \delta_2 X'_2, \quad x'_3 = \alpha_2 \delta_2 X'_3,$$

on aura

$$\Delta_2 X'_3 = X'_2, \quad \Delta_2 X'_2 = x_1.$$

Par ce changement de variables, γ_2 aura été réduit à zéro, α_2 et δ_2 à l'unité; S_2 sera donc de la forme

$$S_2 = \left| \begin{array}{l} \Delta_2 x'_r = a_2 x'_3 + b_2 x'_2, \quad \Delta_2 x'_{r-1} = \dots = \Delta_2 x'_2 = \Delta_2 x'_1 = 0 \\ \Delta_2 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_2 x'_2 = x_1 \end{array} \right|.$$

On fera, d'ailleurs, disparaître b_2 en prenant pour variable $x_r = b_2 x'_3$. Enfin, si a_2 n'est pas nul, on peut le rendre égal à l'unité en prenant pour variables $\mu x'_2$, $\mu^2 x'_3$ et pour substitution génératrice $\frac{1}{\mu} S_2$, μ désignant la racine cubique de a_2 .

On aura donc deux cas possibles, $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$. Dans chacun de ces deux cas, la combinaison des substitutions σ , S_1 , S_2 donnera un groupe abélien.

Chacun d'eux sera général. Voyons, en effet, parmi les substitutions de l'espèce Σ celles qu'on pourrait lui adjoindre pour le compléter :

1^o Si $a_2 = 1$, ces substitutions devraient laisser invariables x_r , x'_{r-1} , ..., x_1 , x'_3 , x'_2 ; elles se réduiraient donc à l'unité.

2^o Si $a_2 = 0$, ces substitutions, simplifiées au besoin par leur combinaison avec les dérivées de S_2 , laisseront invariables x_3 , x'_2 . Elles

ne pourraient donc plus altérer que la seule variable x_r qu'elles accroîtraient d'une quantité

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2.$$

Mais on aurait

$$D\Delta_2 x_r = 0, \quad \Delta_2 Dx_r = ax'_2 + bx_1.$$

Donc $a = b = 0$ et les substitutions cherchées se réduisent à l'unité.

40. Deuxième hypothèse : $\Delta_1 x'_3 = x'_2$, $\Delta_1 x'_2 = 0$. — On aura

$$S_1 = [\Delta_1 x_r = x_{r-1}, \quad \dots, \quad \Delta_1 x_2 = x_1, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = 0]$$

et pour les substitutions Σ

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2,$$

$$Dx_{r-1} = D\Delta_1 x_r = \Delta_1 Dx_r = ax'_2,$$

$$Dx_{r-2} = \dots = Dx_1 = 0,$$

$$Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1,$$

$$Dx'_2 = D\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 Dx'_3 = \beta x_1.$$

Divers cas seront à distinguer ici :

1° Supposons d'abord que G contienne une substitution S_2 de l'es-pèce Σ et dans laquelle a ne soit pas nul. Les dérivées des substitutions S_1 , S_2 permettant d'accroître x_r d'autant de fonctions linéairement distinctes qu'il y a de variables, G ne contiendra pas d'autres substitutions (n° 9).

Il reste à réduire ce groupe à une forme canonique en changeant de variables indépendantes et de substitutions génératrices.

On peut tout d'abord prendre pour nouvelles variables

$$X'_3 = ax'_3 + bx'_2, \quad X'_2 = ax'_2$$

au lieu de x'_2 , x'_3 ; les substitutions S_1 , S_2 conserveront leur forme; mais a sera réduit à l'unité et b à zéro. Soit donc

$$S_2 = [\Delta_2 x_r = x'_3, \Delta_2 x_{r-1} = x'_2, \dots, \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1].$$

Le coefficient β sera ≥ 0 , car, s'il était nul, x'_2 n'étant altérée par aucune substitution de G , serait de rang 1 et non de rang 2.

Si α est également ≥ 0 , nous poserons

$$X'_3 = x'_3 + \lambda x_2, \quad X'_2 = x'_2 + \lambda x_1.$$

Ce changement de variable n'altère pas l'expression de S_1 ; mais l'on aura pour S_2

$$\begin{aligned} \Delta_2 x_r &= X'_3 - \lambda x_2, & \Delta_2 x_{r-1} &= X'_2 - \lambda x_1, \\ \Delta_2 X'_3 &= \alpha X'_3 + \beta x_2 + (\gamma - \alpha \lambda) x_1, & \Delta_2 x'_2 &= \beta x_1. \end{aligned}$$

On peut déterminer λ de telle sorte que $\gamma - \alpha \lambda$ soit nul.

Cela fait, il existe parmi les dérivées de S_1 une substitution s qui donne aux variables $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, X'_3, \dots$ les accroissements respectifs

$$\begin{aligned} \delta x_r &= \lambda \Delta_1^{r-2} x_r = \lambda x_2, & \delta x_{r-1} &= \lambda \Delta_1^{r-2} x_{r-1} = \lambda x_1, & \delta x_{r-2} &= 0, & \dots, \\ \delta X'_3 &= \lambda \Delta_1^{r-2} X'_3 = 0, & & & & \dots \end{aligned}$$

On pourra prendre pour substitution génératrice de G , au lieu de S_2 , la substitution $(S_2 + s)$ qui a la même forme que S_2 , sauf que le coefficient γ a été annulé.

Il est donc permis de supposer que dans l'expression de S_2 l'un au moins des deux coefficients α, γ est nul.

Posons maintenant

$$\dots, \quad X_m = \lambda^m x_m, \quad \dots, \quad X_3 = u \lambda^r x'_3, \quad X_2 = u \lambda^{r-1} x'_2,$$

et prenons $S'_1 = \lambda^{-1} S_1$, $S'_2 = u S_2$ pour substitutions génératrices au lieu de S_1, S_2 . Les coefficients α, β, γ se reproduiront multipliés respectivement par $u \lambda, u^2 \lambda^{r-2}, u^2 \lambda^{r-1}$. On pourra profiter de l'indétermination de λ, u pour réduire à l'unité le coefficient β , et celui des coefficients α, γ qui pourrait être différent de zéro.

On obtient ainsi *trois* types réduits correspondant aux trois hypothèses

$$\beta = 1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = 1, & \gamma = 0, \\ \alpha = 0, & \gamma = 1, \\ \alpha = 0, & \gamma = 0. \end{array} \right.$$

41. 2° Supposons maintenant que, parmi les substitutions de l'espèce Σ que G peut contenir, il n'en existe aucune où α soit différent de zéro; G contiendra nécessairement (n° 10) la substitution σ_1 qui accroît x'_3 de x_1 sans altérer les autres variables; et il sera dérivé de la combinaison des substitutions σ_1 , S_1 avec d'autres substitutions Σ' pour lesquelles

$$D'x_r = bx'_2, \quad D'x_{r-1} = bx_1, \quad D'x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \quad D'x'_2 = \beta x_1,$$

les autres variables restant inaltérées.

Supposons que parmi ces substitutions Σ' (contenues dans G) il en existe une S_2 où b ne soit pas nul. On peut le supposer égal à l'unité; et l'on aura

$$S_2 = [\Delta_2 x_r = x'_2, \Delta_2 x_{r-1} = x'_1, \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1].$$

Le groupe G sera dérivé des seules substitutions σ' , S_1 , S_2 . Car, s'il contenait une autre substitution S_3 non dérivée de celle-là, on pourrait admettre qu'elle laisse invariable x_r et, par suite, x_{r-1} , ..., x_1 , x'_2 . Quant à x'_3 son accroissement serait de la forme

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha' x'_2 + \beta' x_2.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_3 x'_3 &= \beta' x_1, & \Delta_3 \Delta_1 x'_3 &= 0, & \text{d'où} & \quad \beta' = 0, \\ \Delta_2 \Delta_3 x'_3 &= \alpha' \beta_1 x_1, & \Delta_3 \Delta_2 x'_3 &= 0, & \text{d'où} & \quad \alpha' \beta_1 = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs β_1 ne peut être nul (car x'_2 ne serait pas de rang 2). Donc $\alpha' = \beta' = 0$, et S_3 se réduit à l'unité.

Posons enfin

$$\begin{aligned} \dots, \quad X_m &= \lambda^m x_m, & \dots, \quad X'_3 &= \mu \lambda^r x'_3, & X'_2 &= \mu \lambda^{r-1} x_2, \\ \sigma'_1 &= \frac{1}{\mu \lambda^{r-1}} \sigma_1, & S'_1 &= \lambda^{-1} S_1, & S'_2 &= \mu S_2. \end{aligned}$$

Les coefficients b , α , β seront par ce changement multipliés respectivement par

$$\frac{\mu \lambda}{\mu}, \quad \mu \lambda, \quad \mu \lambda^{r-2},$$

ce qui permettra de réduire b et β à l'unité, et α à l'une des deux valeurs 0 ou 1 : on obtient ainsi *deux* types réduits.

42. 3^o Supposons enfin que toutes celles des substitutions Σ que G contient laissent invariable x_r (et, par suite, x_{r-1}, \dots, x_1). Le groupe G résultera de la combinaison des substitutions σ_1, S_1 avec de nouvelles substitutions de la forme

$$\Sigma = [Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, Dx'_2 = \beta x_1].$$

Or deux substitutions de cette forme ne sont échangeables que si leurs coefficients sont proportionnels. On ne pourra donc adjoindre à σ_1, S_1 pour former le groupe G qu'une seule substitution nouvelle

$$S_2 = [\Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1]$$

et ses multiples.

Le coefficient β ne peut être nul (car x'_2 ne serait pas de rang 2); mais on peut le ramener à l'unité, et le coefficient α à l'unité ou à zéro; car on peut comme tout à l'heure les multiplier par les deux indéterminées $u\lambda, u\mu\lambda^{r-2}$.

On obtient ainsi *deux* types réduits nouveaux, correspondant aux deux valeurs de α .

Conclusion. — Il existe *neuf* groupes réduits de signature $[1, 2, 2, 1, 1, \dots]$, quel que soit d'ailleurs le nombre des unités qui terminent cette signature (s'il y en a plus d'une).

9^o Groupes de signature $[2, 2, n]$.

45. Soient $x'_1, x''_1; x'_2, x''_2; x'_3, x''_3$ ($i = 1, 2, \dots, n$) les variables.

Les groupes cherchés s'obtiennent par la combinaison des σ avec d'autres substitutions S , dans lesquelles chacune des variables x'_3 de rang 3 reçoit un accroissement de la forme

$$\Delta x'_3 = a_i x_2 + b_i x'_2.$$

Première hypothèse. — Le groupe contient deux substitutions $S_1,$

S_2 , telles que les deux fonctions

$$\Delta_1 x'_3, \quad \Delta_2 x'_3$$

soient distinctes.

Prenons-les pour variables indépendantes; on aura

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_2 x'_3 = x''_2$$

et le groupe sera dérivé de σ , S_1 , S_2 et d'autres substitutions Σ qui n'altèrent plus x'_3 , x'_2 , x''_2 , x'_1 , x''_1 . Ces substitutions Σ donneront à l'une quelconque des variables restantes un accroissement

$$\Delta x'_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2.$$

On aura d'ailleurs

$$\Delta_1(a_i x'_2 + b_i x''_2) = \Delta_1 \Delta_1 x'_3 = \Delta \Delta_1 x'_3 = 0,$$

car $\Delta_1 x'_3$ ne dépend que de x'_2 , x''_2 que les Σ n'altèrent pas. On trouvera de même

$$\Delta_2(a_i x'_2 + b_i x''_2) = 0.$$

La fonction $a_i x'_2 + b_i x''_2$ ne serait donc altérée par aucune substitution de G , quoiqu'elle soit de rang 2. Cette contradiction ne peut être levée que si $a_i = b_i = 0$.

Les substitutions Σ n'altéreront donc aucune des variables et se réduiront à l'unité. Le groupe G sera donc dérivé des seules substitutions σ , S_1 , S_2 .

L'analyse du n° 18 nous a montré que la substitution

$$S = (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2),$$

qui donne à x'_3 l'accroissement

$$\Delta x'_3 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2,$$

donne à $\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2$ un accroissement de la forme

$$\Delta(\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2) = \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} + \mu_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2},$$

où

$$\psi = x'_i \psi_1 + x''_i \psi_2,$$

ψ_1 et ψ_2 étant quadratiques en λ_1, λ_2 . En choisissant convenablement les variables et les substitutions génératrices, on pourra faire en sorte que ψ soit réduit à l'un des trois types suivants :

$$\frac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2), \quad \frac{1}{2}x'_1\lambda_1^2 + x'_1\lambda_1\lambda_2, \quad \frac{1}{2}x'_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

d'où autant de cas distincts à étudier séparément.

44. *Premier cas* : $\psi = \frac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2)$. — Les substitutions S_1, S_2 donneront à x'_3, x'_2, x''_2 les accroissements

$$\begin{aligned} \Delta_1 x'_3 &= x'_2, & \Delta_1 x'_2 &= x'_1, & \Delta_1 x''_2 &= 0, \\ \Delta_2 x'_3 &= x''_2, & \Delta_2 x'_2 &= 0, & \Delta_2 x''_2 &= x'_1, \end{aligned}$$

et à une autre variable de rang 3 (s'il en existe plusieurs), telle que x''_3 , des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x''_3 = a x'_2 + b x''_2, \quad \Delta_2 x''_3 = c x'_2 + d x''_2.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_1 \Delta_2 x''_3 = c x'_1, \quad \Delta_2 \Delta_1 x''_3 = b x'_1,$$

done $b = 0, c = 0$. On peut enfin rendre a égal à zéro en prenant pour variable $x''_3 = a x'_3$ au lieu de x''_3 . Cela fait, d ne pourra être nul, car, x''_3 étant de rang 3, G doit contenir au moins une substitution qui lui donne un accroissement de rang 2. On rendra d égal à 1, en prenant pour variable $\frac{1}{d} x''_3$. Soit donc

$$\Delta_1 x''_3 = 0, \quad \Delta_2 x''_3 = x''_2.$$

Il ne peut exister une troisième variable x'''_3 de rang 3, car S_1, S_2 lui donneraient des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x'''_3 = a x'_1, \quad \Delta_2 x'''_3 = d x''_2;$$

elles n'altéreraient donc pas la fonction

$$x'''_3 - a x'_1 - (d - a) x''_2$$

qu'on pourrait prendre pour variable indépendante au lieu de x_3'' et qui serait de rang < 3 .

La discussion de ce premier cas nous fournit donc un groupe de signature $[2, 2, 1]$ et un autre de signature $[2, 2, 2]$; aucun de signature $[2, 2, n]$, si $n > 2$.

43. *Deuxième cas* : $\psi = \frac{1}{2}x_1'\lambda_1^2 + x_1''\lambda_1\lambda_2$. — On a ici

$$\begin{aligned}\Delta_1 x_3' &= x_2', & \Delta_1 x_3'' &= x_1', & \Delta_1 x_2'' &= x_1'', \\ \Delta_2 x_3' &= x_2'', & \Delta_2 x_3'' &= x_1'', & \Delta_2 x_2'' &= 0.\end{aligned}$$

Si l'y a une autre variable x_3'' de rang 3, elle subira des accroissements

$$\Delta_1 x_3'' = ax_2' + bx_2'', \quad \Delta_2 x_3'' = cx_2' + dx_2''.$$

Mais

$$\Delta_1 \Delta_2 x_3'' = cx_1' + dx_1'', \quad \Delta_2 \Delta_1 x_3'' = ax_1'',$$

d'où $c = 0$, $a = d$. Par les mêmes changements de variables que dans le cas précédent, on rendra $a = d$ nul et b égal à 1.

On voit de même qu'il ne peut exister de troisième variable de rang 3. On obtient donc, comme dans le cas précédent, deux groupes, de signature $[2, 2, 1]$ et $[2, 2, 2]$ respectivement.

46. *Troisième cas* : $\psi = \frac{1}{2}x_1'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. — On aura

$$\begin{aligned}\Delta_1 x_3' &= x_2', & \Delta_1 x_3'' &= x_1', & \Delta_1 x_2'' &= 0, \\ \Delta_2 x_3' &= x_2'', & \Delta_2 x_3'' &= 0, & \Delta_2 x_2'' &= x_1'.\end{aligned}$$

Si l'y a qu'une variable de rang 3, la construction du groupe sera terminée. Si en existe une seconde, x_{33}' , elle recevra des accroissements

$$\Delta_1 x_{33}' = ax_2' + bx_2'', \quad \Delta_2 x_{33}' = cx_2' + dx_2'',$$

mais

$$\Delta_1 \Delta_2 x_{33}' = cx_1', \quad \Delta_2 \Delta_1 x_{33}' = bx_1',$$

donc $b = c$.

D'ailleurs, en prenant pour variable $x_{33}'' = ax_{33}'$, on annulera a ; il restera donc

$$\Delta_1 x_{33}'' = bx_2', \quad \Delta_2 x_{33}'' = bx_2' + dx_2''.$$

S'il existe une troisième variable de rang 3, telle que x_3'' , on aura de même

$$\Delta_1 x_3'' = \beta x_2'', \quad \Delta_2 x_3'' = \beta x_2' + \gamma x_2''.$$

En remplaçant x_3'' , x_3''' par des fonctions linéaires convenables, il viendra plus simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3'' &= x_2'', & \Delta_1 x_3''' &= 0, \\ \Delta_2 x_3'' &= x_2', & \Delta_2 x_3''' &= x_2''. \end{aligned}$$

On a ainsi formé un groupe G de signature $[2, 2, 3]$.

On ne peut ajouter une quatrième variable x_3'' , car en la combinant avec les précédentes on la remplacerait par une nouvelle variable pour laquelle Δ_1 et Δ_2 seraient nuls et qui, par suite, serait de rang < 3 .

Revenons au cas où il n'y a que deux variables x_3' , x_3'' de rang 3. Nous avons, dans les expressions de $\Delta_1 x_3''$, $\Delta_2 x_3''$, deux paramètres b , d . Ils ne peuvent être nuls à la fois, car x_3'' ne serait pas de rang 3. Si l'un d'eux est nul, on pourra rendre l'autre égal à l'unité, en remplaçant x_3'' par un de ses multiples. Si tous deux sont différents de zéro, on peut rendre encore l'un d'eux égal à l'unité, mais on ne pourra modifier leur rapport, qui subsiste comme paramètre invariant.

La discussion de ce cas donne donc *trois* groupes, de signature

$$[2, 2, 2] :$$

Dans le premier.....	$b = 0,$	$d = 1,$
Dans le second.....	$b = 1,$	$d = 0,$
Dans le troisième.....	$b = 1,$	$d = e,$

e étant un invariant non nul.

47. Deuxième hypothèse. — Supposons, au contraire, que toutes les substitutions S accroissent x_3' des multiples d'une même fonction.

Il existe (n° II) une substitution S_1 , telle que $\Delta_1 x_3'$, $\Delta_1^2 x_3'$ soient de rang 2, 1 respectivement. En les prenant pour variables indépendantes, on pourra écrire

$$\Delta_1 x_3' = x_2', \quad \Delta_1 x_2' = x_1', \quad \Delta_1 x_1' = 0.$$

Les accroissements des autres variables seront de la forme

$$\begin{aligned}\Delta_1 x'_3 &= a_i x'_2 + b_i x''_2 & (i = 2, \dots, n), \\ \Delta_1 x''_2 &= \alpha x'_1 + \beta x''_1, & \Delta_1 x''_1 = 0.\end{aligned}$$

Mais on peut supposer les coefficients a_i, α nuls, car on les ferait disparaître au besoin par le changement de variables

$$X''_2 = x''_2 - \alpha x'_1, \quad X'_3 = x'_3 - (a_i + \alpha b_i) x'_2.$$

Soit donc plus simplement

$$\Delta_1 x'_3 = b_i x''_2, \quad \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1.$$

Si β n'est pas nul, on le réduira ensuite à l'unité en prenant pour nouvelle variable $\frac{1}{\beta} x''_2$; enfin, si l'un des coefficients b_i , par exemple b_2 , est différent de zéro, on le rendra égal à 1 et l'on annulera b_3, \dots par un dernier changement de variables

$$X''_3 = \frac{1}{b_2} x''_3, \quad X'_3 = x'_3 - \frac{b_i}{b_2} x''_3;$$

S_1 sera ainsi ramené à la forme

$$S_1 = \begin{vmatrix} \Delta_1 x'_3 = x'_2, & \Delta_1 x'_2 = x'_1, & \Delta_1 x'_1 = 0 \\ \Delta_1 x''_3 = b_i x''_2, & \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1, & \Delta_1 x''_1 = 0 \\ \Delta_1 x'_3 = 0, & \text{si } i > 2, \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} b = 0 \text{ ou } 1 \\ \beta = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right).$$

48. Nous allons établir que l'hypothèse de l'existence de plusieurs variables de rang 3 doit être rejetée.

Le groupe G doit, en effet, dériver de la combinaison des substitutions σ, S_1 avec de nouvelles substitutions Σ qui n'altèrent plus x'_3, x''_2, x'_1, x''_1 , et qui donneront aux autres variables des accroissements

$$Dx''_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_i, \quad Dx'_3 = c_i x'_2 + d_i x''_2 \quad (i > 1).$$

Supposons tout d'abord qu'on ait au moins trois variables de rang 3, x'_3, x''_3, x'''_3 . Les substitutions σ donnent à x'''_2 un accroissement de rang 1;

S_1 le laisse invariable. Mais G doit contenir une substitution au moins qui lui donne un accroissement de rang 2 (n° 11). Cette substitution Σ_1 sera de l'espèce Σ et différente de l'unité. Elle donnera à x_3'' un accroissement

$$D_1 x_3'' = c x_2' + d x_2''.$$

Mais, étant échangeable à S_1 , elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_1 n'altère pas; donc c sera nul et, comme $D_1 x_3''$ ne peut être identiquement nul, d sera ≥ 0 .

Considérons maintenant la fonction

$$X_3' = x_3'' + \lambda x_3'.$$

Les substitutions S_1 et Σ_1 l'accroissent respectivement de $\lambda x_2'$ et de $d x_2''$; ces deux fonctions sont linéairement distinctes. Donc, en prenant X_3' comme variable indépendante, nous retomberions sur la première hypothèse, déjà complètement discutée (n°s 42-43).

La même démonstration s'appliquerait au cas où l'on n'aurait que deux variables de rang 3, x_3' , x_3'' , mais où b serait nul.

Si b était égal à 1, on aurait

$$S_1 = \begin{vmatrix} \Delta_1 x_3' = x_2', & \Delta_1 x_2' = x_1', & \Delta_1 x_1' = 0 \\ \Delta_1 x_3'' = x_2'', & \Delta_1 x_2'' = \beta x_1'', & \Delta_1 x_1'' = 0 \end{vmatrix},$$

et le groupe abélien dérivé de σ , S_1 n'est pas général, car la substitution

$$\begin{vmatrix} \Delta x_3' = \Delta x_2' = \Delta x_1' = 0 \\ \Delta x_3'' = x_2'', & \Delta x_2'' = \beta x_1'', & \Delta x_1'' = 0 \end{vmatrix}$$

est évidemment échangeable à ses substitutions. On devra donc le compléter par l'adjonction d'une substitution au moins de l'espèce Σ , autre que l'unité. Cette substitution Σ_1 laissera x_3' invariable et accroîtra x_3'' d'une expression de la forme

$$D_1 x_3'' = c x_2' + d x_2''.$$

Mais, si c n'était pas nul, les accroissements $D_1 x_3'$, $\Delta_1 x_3'$ seraient deux

fonctions linéairement distinctes et l'on retomberait ainsi sur la première hypothèse.

Si $c = 0$ et $d \geq 0$, la fonction $X_3 = x_3'' + \lambda x_3'$ aurait des accroissements $dx_2', x_2'' + \lambda x_2'$ linéairement distincts. On retomberait encore sur la première hypothèse.

Enfin, si c et d étaient nuls, Σ_1 laissant x_3'' invariable, n'altérerait pas $x_2'' = \Delta_1 x_3''$ (n° 8). Elle se réduirait donc à l'unité, résultat inadmissible.

49. Considérons enfin le cas où il n'existe qu'une variable de rang 3; on aura

$$S_1 = [\Delta_1 x_3' = x_2', \quad \Delta_1 x_2' = x_1', \quad \Delta_1 x_1' = 0, \quad \Delta_1 x_2'' = \beta x_1'', \quad \Delta_1 x_1'' = 0].$$

Les substitutions Σ n'altèrent que x_2'' et lui donnent un accroissement de la forme

$$Dx_2'' = \gamma x_1' + \delta x_1''.$$

Toutes ces substitutions sont évidemment échangeables entre elles, et le groupe cherché s'obtiendra en les adjoignant aux substitutions σ, S_1 . D'ailleurs, les deux substitutions S_1^0, S_1^1 , que l'on obtient en faisant successivement $\beta = 0, \beta = 1$ dans l'expression de S_1 , résultent évidemment de la combinaison de l'une d'elles avec une substitution Σ . On aura donc un seul groupe G , dérivé des substitutions σ, S_1^0, Σ .

En résumé, nous avons obtenu :

Quatre groupes de signature $[2, 2, 1]$ (confirmation d'un résultat déjà trouvé);

Cinq de signature $[2, 2, 2]$;

Un de signature $[2, 2, 3]$;

Aucun de signature $[2, 2, n]$, $n > 3$.

IV. — Récapitulation.

50. Parmi les groupes G construits dans la section précédente figurent tous ceux où le nombre n des variables ne surpasse pas 6. Le Tableau suivant indique leur nombre pour chaque signature donnée :

1° Deux variables.

Signature.	Nombre des groupes.
$[1, 1]$	1
	—
Total.....	1

2° Trois variables.

Signature.	Nombre des groupes.
$[1, 2]$	1
$[2, 1]$	1
$[1, 1, 1]$	1
	—
Total.....	3

3° Quatre variables.

Signature	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
$[1, 3]$	1	$[1, 1, 2]$	0
$[2, 2]$	1	$[1, 2, 1]$	2
$[1, 3]$	1	$[2, 1, 1]$	1
		$[1, 1, 1, 1]$	1
			—
		Total.....	7

4° Cinq variables.

Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
$[1, 4]$	1	$[1, 1, 3]$	0	$[1, 1, 1, 2]$	0
$[2, 3]$	1	$[1, 3, 2]$	3	$[1, 1, 2, 1]$	0
$[3, 2]$	1	$[1, 3, 1]$	3	$[1, 2, 1, 1]$	3
$[4, 1]$	1	$[2, 1, 2]$	0	$[3, 1, 1, 1]$	1
		$[2, 2, 1]$	1	$[1, 1, 1, 1, 1]$	1
		$[3, 1, 1]$	1		—
				Total.....	18

5° Six variables.

Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
$[1, 5] \dots$	1	$[3, 1, 2] \dots$	0	$[2, 1, 1, 2] \dots$	0
$[2, 4] \dots$	1	$[3, 2, 1] \dots$	5	$[2, 1, 2, 1] \dots$	0
$[3, 3] \dots$	1	$[4, 1, 1] \dots$	1	$[2, 2, 1, 1] \dots$	5
$[4, 2] \dots$	1	$[1, 1, 1, 3] \dots$	0	$[3, 1, 1, 1] \dots$	1
$[5, 1] \dots$	1	$[1, 1, 2, 2] \dots$	0	$[1, 1, 1, 1, 2] \dots$	0
$[1, 1, 4] \dots$	0	$[1, 1, 3, 1] \dots$	0	$[1, 1, 1, 2, 1] \dots$	0
$[1, 2, 3] \dots$	7	$[1, 2, 1, 2] \dots$	0	$[1, 1, 2, 1, 1] \dots$	0
$[1, 3, 2] \dots$	4	$[1, 2, 2, 1] \dots$	8	$[1, 2, 1, 1, 1] \dots$	2
$[1, 4, 1] \dots$	4	$[1, 3, 1, 1] \dots$	3	$[2, 1, 1, 1, 1] \dots$	1
$[2, 1, 3] \dots$	0			$[1, 1, 1, 1, 1, 1] \dots$	1
$[2, 2, 2] \dots$	5				
$[2, 3, 1] \dots$	11				
				Total.....	63

*Sur la croissance des fonctions multiformes :***PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.****Préface.**

I. Ce travail est la suite d'un autre travail ⁽¹⁾ publié dans le même Recueil : *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1906), dans lequel j'ai fait une étude systématique de la croissance des fonctions algébroides (ayant un nombre fini de branches); j'y ai démontré qu'elle jouit de la plupart des propriétés fondamentales des algébroides uniformes (dites *fonctions entières* ou *méromorphes*). Je me propose d'exposer ici quelques nouveaux résultats concernant la croissance des algébroides multiformes et se rattachant à la recherche de la forme la plus générale, sous laquelle le théorème de M. Picard et ses généralisations s'étendent aux algébroides multiformes avec *un cas d'exception unique*; ce qui est intéressant, dans cette extension, c'est que la densité des zéros et des infinis n'est pas suffisante pour les algébroides *multiformes* : il nous faut aussi tenir compte d'autres éléments qui interviennent et jouent un rôle essentiel.

Mon but principal est de montrer la différence profonde qui existe

⁽¹⁾ Dont la connaissance est nécessaire pour l'intelligence du présent Mémoire; il sera mentionné, au cours de ce travail, par l'expression : Mémoire précédent.

entre la croissance des fonctions algébroides et celle des autres transcendantes multiformes; je présente des transcendantes non algébroides, qui jouissent de propriétés de croissance très singulières par rapport à celles auxquelles nous sommes habitués jusqu'ici. Pour y arriver, il m'a fallu étendre aux fonctions multiformes le théorème bien connu de Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière admettant des zéros donnés; ici les ordres de multiplicité peuvent être aussi fractionnaires. Ce travail est le développement d'une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 septembre 1906.

L'extension du théorème de Weierstrass.

2. Je commencerai par établir l'extension précitée du théorème de Weierstrass: Il est bien connu que, étant donnée une série de nombres z_1, z_2, z_3, \dots , on peut former une fonction entière (plus précisément, une algébroïde uniforme entière) admettant ces zéros; voyons maintenant s'il est possible de former une algébroïde multiforme admettant comme zéros les nombres $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$, avec des degrés de multiplicité respectivement égaux à $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, qui peuvent être des nombres entiers ou fractionnaires. On dit que z_i est un zéro de la fonction $f(z)$ de degré de multiplicité égal à k_i , lorsque l'on a

$$f(z) = (z - z_i)^{k_i} f_i(z), \quad f_i(z_i) \neq 0 \quad \text{et fini.}$$

A cet effet, remarquons que, si l'on veut former une fonction multiforme à n branches, tous les dénominateurs des nombres K_i , supposés irréductibles, devront être inférieurs à n , et, par conséquent, le nombre $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ sera certainement un multiple commun de tous les dénominateurs. Les produits $k_1 n!, k_2 n!, \dots, k_n n!$ étant des nombres entiers, posons $k_i n! = \lambda_i$ et formons la fonction entière $G(z)$ admettant comme zéros les mêmes nombres z_i avec des degrés de multiplicité égaux aux nombres entiers λ_i ; il est alors clair que la fonction multiforme $f(z) = G(z)^{\frac{1}{n!}}$ admet les zéros z_i avec des degrés de multiplicité égaux à $\frac{\lambda_i}{n!} = k_i$ et notre problème se trouve résolu.

Il est bien entendu que l'on pourrait employer le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres k_i au lieu de $n!$.

L'algébroïde multiforme ainsi obtenue correspond au produit canonique de Weierstrass relatif aux algébroïdes uniformes; il en résulte que toute algébroïde $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad F(z) = f(z) e^{\tilde{g}(z)}.$$

Si nous appelons *algébroïde entière* toute algébroïde n'ayant pas d'infini à distance finie, nous avons aussi le corollaire suivant :

Toute algébroïde non entière peut se mettre sous la forme du quotient de deux algébroïdes entières.

La propriété exprimée par l'égalité (1) est fondamentale pour les considérations qui vont suivre.

Sur quelques transcendentes non algébroïdes.

Classe I.

5. Dans mon travail cité plus haut, j'ai démontré que les transcendentes algébroïdes jouissent, en particulier, de la propriété suivante : *Une fonction algébroïde n'a jamais son ordre de grandeur inférieur à celui de sa dérivée.*

Nous allons démontrer que c'est là une propriété essentielle, sinon caractéristique, des fonctions algébroïdes, en présentant des transcendentes non algébroïdes croissant beaucoup moins vite que leurs dérivées. Dans des travaux antérieurs (*voir mon Mémoire précité*), j'ai donné et justifié la définition de l'ordre de grandeur des transcendentes algébroïdes; celui des algébroïdes non entières est défini, ou bien directement, ou bien à l'aide du corollaire cité dans le numéro précédent par la forme du quotient de deux algébroïdes entières.

Si, par exemple, $F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$, l'ordre de $F(z)$ est égal au plus grand des ordres de grandeur de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

Cela posé, considérons une algébroïde $F(z)$ quelconque et une

valeur exceptionnelle α , au sens ordinaire du mot, relatif à la densité des zéros et des infinis de $F(z) - \alpha$; j'entends par là que l'on a

$$(2) \quad F(z) - \alpha = f(z) e^{\varphi(z)},$$

$f(z)$ étant une algèbroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$ et $\Phi(z)$ une fonction finie à distance finie; dans cette décomposition, le facteur $f(z)$ est, en général, un quotient de deux produits canoniques de facteurs primaires. Dans mon Mémoire précédent, j'ai démontré que le cas où l'exposant $\varphi(z)$ est aussi algèbroïde est d'un caractère exceptionnel, puisqu'il est impossible que cette circonstance se présente pour deux valeurs de α ; si $F(z)$ est une algèbroïde uniforme, ce nouveau cas d'exception unique (double exception) coïncide avec le premier, parce que l'exposant $\varphi(z)$ est aussi uniforme pour tout nombre α , exceptionnel ou non.

Je veux actuellement établir que le résultat précité n'est qu'une circonstance particulière d'un autre résultat plus précis, et ce qui caractérise le cas d'exception unique tient à un fait général concernant la croissance de la dérivée $\varphi'(z)$, ou bien celle de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\varphi(z)$.

4. Supposons que $F(z)$ croisse comme $e^{\mu(r)}$; j'entends par là que l'on a les relations

$$|F(z)| < e^{\mu(r)^{1+\alpha}}, \quad \max. |F(z)| > e^{\mu(r)^{1-\alpha}}, \quad \text{pour } |z| = r,$$

α étant un nombre positif quelconque, la première à partir d'une valeur de r et la seconde pour une infinité de valeurs de r croissantes indéfiniment. La fonction $\varphi(z)$ croissant comme $\mu(r)$ ⁽¹⁾, je veux démontrer que cette fonction $\varphi(z)$ jouit, sauf pour une valeur de α , au plus, de deux propriétés suivantes : 1^o elle n'est pas algèbroïde; 2^o sa dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction.

La première propriété est une conséquence de la seconde. La démon-

(1) Voir plus bas la preuve de cette assertion (n^o 5); elle suppose une restriction que nous citons aussi dans le numéro suivant.

stration de ce théorème se fait par un procédé devenu classique depuis les travaux de M. Borel sur le théorème de M. Picard. Soient α_1 et α_2 deux valeurs de z ; l'élimination de $F(z)$ entre les identités

$$F(z) - \alpha_1 = f_1(z) e^{\varphi_1(z)}, \quad F(z) - \alpha_2 = f_2(z) e^{\varphi_2(z)}$$

nous conduit à l'identité

$$\alpha_2 - \alpha_1 = f_1(z) e^{\varphi_1(z)} - f_2(z) e^{\varphi_2(z)}.$$

Cette identité n'appartient pas tout à fait à la classe de celles que nous avons étudiées dans notre Mémoire précédent (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1906), puisque les exposants $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne sont pas, en général, algébroides; mais, les dérivées de ces exposants étant algébroides, l'on pourrait établir l'impossibilité de cette identité par la même méthode que celle du Mémoire précédent, si les dérivées $\varphi'_1(z)$ et $\varphi'_2(z)$ croissaient moins vite que $e^{k \cdot r}$, c'est-à-dire s'il y a un nombre positif ε tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r ,

$$|\varphi'_1(z)| < e^{k(r)^{1-\varepsilon}}, \quad |\varphi'_2(z)| < e^{k(r)^{1-\varepsilon}}, \quad |z| = r.$$

En effet, la dérivation nous conduit à l'identité suivante

$$[f'_1(z) + f_1(z) \varphi'_1(z)] e^{\varphi_1(z)} - [f'_2(z) + f_2(z) \varphi'_2(z)] e^{\varphi_2(z)} = 0,$$

dans laquelle les coefficients des exponentielles sont aussi algébroides d'ordre de grandeur inférieur à $e^{k \cdot r}$; dès lors, l'impossibilité se manifeste par des raisonnements bien connus [Voir les travaux de M. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX); aussi la thèse de M. Kraft : *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung*, et la mienne], grâce aux propriétés des fonctions algébroides, établies dans notre Mémoire précédent, qui assurent l'existence d'une suite indéfinie d'intervalles, dans lesquels le module maximum de l'exponentielle est supérieur à $e^{k \cdot r_i^{1-\varepsilon}}$, tandis que le module des coefficients est supérieur à $e^{-k \cdot r_i^{1-\varepsilon}}$ avec $\varepsilon_i > \varepsilon$.

Comme il existe des algébroides admettant plusieurs valeurs excep-

tionnelles ordinaires, le résultat auquel nous sommes arrivé ⁽¹⁾ nous fait connaître des fonctions non algébroides présentant la différence de croissance avec leurs dérivées ci-dessus signalée. D'une façon précise, nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME I. — *La dérivée $\varphi'(z)$ de l'exposant $\varphi(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de z .*

Il est clair que ce théorème s'étend de lui-même aux différences $F(z) - W(z)$, $W(z)$ désignant une algébroïde quelconque d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$; il n'y a rien à changer dans nos procédés.

3. Nous avons plus haut émis l'assertion que l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$; j'entends par là que l'on a

$$(3) \quad \mu(r)^{1+\varepsilon} > \max. |\varphi(z)| > \mu(r)^{1-\varepsilon},$$

avec quelques intervalles d'exclusion négligeables (ε étant arbitrairement petit). Or, cela n'est pas du tout évident, puisque la seule conséquence immédiate des inégalités

$$|e^{\varphi(z)}| < e^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}, \quad \max. |e^{\varphi(z)}| > e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$$

consiste dans les inégalités

$$(4) \quad [\mu(r)]^{1+\varepsilon} > \omega(r) > [\mu(r)]^{1-\varepsilon},$$

$\omega(r)$ désignant le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\varphi(z)$, satisfaites dans les mêmes conditions que les premières; il est donc nécessaire de prouver que les inégalités (3) peuvent se déduire des inégalités (4) avec quelques intervalles d'exclusion négligeables. M. Borel y est arrivé pour les algébroides uniformes entières [Voir *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX) et *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69, Gauthier-Villars]; nous

⁽¹⁾ Combiné avec le fait qu'un choix convenable de l'algébroïde $F(z)$ nous permet d'affirmer que le module de l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$.

allons étendre ce résultat aux fonctions $\varphi(z)$, que nous considérons dans ce travail, en faisant une certaine hypothèse sur l'algébroïde primitive $F(z)$, dont nous sommes partis.

Supposons que l'algébroïde $u = \frac{F(z) - z}{f(z)}$ soit définie par l'équation

$$(5) \quad u^n + e^{H_1(z)} u^{n-1} + e^{H_2(z)} u^{n-2} + \dots + e^{H_{n-1}(z)} u + e^{H_n(z)} = 0,$$

les exposants $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$ désignant des fonctions entières (algébroïdes *uniformes* entières); cette algébroïde

$$F_z(z) = \frac{F(z) - z}{f(z)}$$

est visiblement du même ordre de grandeur $e^{O(r)}$ que l'algébroïde $F(z)$.

Posons

$$H_1(z) = \varpi_1(z) + i\theta_1(z),$$

$$H_2(z) = \varpi_2(z) + i\theta_2(z),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$H_n(z) = \varpi_n(z) + i\theta_n(z),$$

les ϖ_i désignant les parties réelles et les $i\theta_i$ les parties imaginaires des fonctions entières $H_i(z)$; posons aussi

$$u = F_z(z) = R(r, \tilde{z}) e^{i\omega(r, \tilde{\theta})},$$

$R(r, \tilde{\theta})$ désignant le module de u , $\omega(r, \tilde{\theta})$, son argument, et r, \tilde{z} les coordonnées polaires du point z et remarquons que l'équation (5) prend ainsi la forme

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} & R^n e^{in\omega} + R^{n-1} e^{i\varpi_1} e^{i(n-1)\omega + i\theta_1} \\ & + R^{n-2} e^{i\varpi_2} e^{i(n-2)\omega + i\theta_2} + \dots + R e^{i\varpi_{n-1}} e^{i\omega + i\theta_{n-1}} + e^{i\varpi_n} e^{i\theta_n} = 0, \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$|\theta_i| < |H_i| < [\mu(r)]^{1/p},$$

d'après le résultat plus haut cité de M. Borel, établi pour les algè-

broïdes uniformes entières; on a, en effet,

$$|H_i| < (\max. |\sigma_i|)^{1+\beta} < \mu(r)^{1+\beta} \quad (1).$$

On s'en rend aisément compte en remarquant que le maximum de e^{σ_i} n'est pas d'ordre de grandeur supérieur à $e^{\mu(r)}$, conformément à la définition de l'ordre de grandeur d'une algébroïde multiforme, donnée dans mon Mémoire précédent, et les résultats établis dans le même Mémoire. Nous y avons démontré que, si $e^{\mu(r)}$ est le plus grand des ordres de grandeur des coefficients de l'équation, qui définit une algébroïde multiforme $u = M(z)$, nous avons les inégalités

$$|M(z)| < e^{\mu(r)^{1+\beta}}, \quad \max. |M(z)| > e^{\mu(r)^{1-\beta}}, \quad |M(z)| > e^{-\mu(r)^{1+\beta}},$$

β étant arbitrairement petit, la première et la troisième pour toutes les branches et la deuxième pour une, au moins, des branches; il y a, bien entendu, des intervalles d'exclusion, pour lesquels je renvoie le lecteur au Mémoire précédent.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre positif p tel que l'inégalité

$$(6) \quad \max. (\omega) > \mu(r)^{1+p}$$

soit satisfaite pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment. Les inégalités

$$|\theta_i| < [\mu(r)]^{1+\beta} \quad \text{et} \quad (n-i)|\theta_i| < \mu(r)^{1+\beta}, \quad (\beta_i > \beta),$$

étant satisfaites quelque petits que soient les nombres positifs β et β_i , avec quelques intervalles d'exclusion d'étendue négligeable (*voir* les travaux plus haut cités de M. Borel), nous aurons l'inégalité

$$|(n-i)\omega_i + \theta_i| > [\mu(r)]^{1+p} - [\mu(r)]^{1+\beta},$$

satisfaite pour des points d'une infinité de cercles de rayon r croissant indéfiniment; il suffit, pour cela, que l'inégalité (6) soit satisfaite sur

(1) β et β_i étant des nombres positifs arbitrairement petits.

des intervalles d'une étendue supérieure à celle des intervalles d'exclusion, que comportent les identités $|\theta_i| < |\mu(r)|^{1+\beta_i}$. Nous avons

$$|\mu(r)|^{1+p} - |\mu(r)|^{1+\beta_i} > |\mu(r)|^{1+p_i},$$

p_i étant un nombre quelconque inférieur à p , parce que β_i est arbitrairement petit; il en résulte que, pour les points où ω a sa valeur maximum, les arguments de tous les termes de l'équation (5'), *sauf le dernier*, sont supérieurs à $|\mu(r)|^{1+p_i}$, p_i étant un nombre quelconque inférieur à p .

Pour aller maintenant plus loin, il faut avoir recours à une propriété de l'argument d'une somme de nombres : Étant donnés les arguments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ des nombres ayant comme affixes les points $M_1(\rho_1, \gamma_1), M_2(\rho_2, \gamma_2), \dots, M_n(\rho_n, \gamma_n)$, l'argument de la somme de ces nombres sera de la forme

$$\gamma + 2k\pi i,$$

k étant un entier quelconque et γ un argument (angle) supérieur au plus petit des arguments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; il est, en effet, clair que l'affixe de la somme sera un point M tel que le vecteur OM se trouve entre les vecteurs OM_1, OM_2, \dots, OM_n . Si nous appelons $a(r)$ l'argument de la somme des n premiers termes de l'équation (5') et R_i son module, nous aurons

$$R_i e^{a_i} = - e^{b_n} e^{i\theta_n}$$

et

$$(7) \quad a(r) - a_0(r) + 2\pi i D(r),$$

$a_0(r)$ étant une fonction continue de r supérieure toujours à l'argument $\omega + \theta_{n-1}$, qui est le plus petit parmi ceux des n premiers termes de l'équation (5'); on aura donc

$$a_0(r) > |\mu(r)|^{1+p_i}.$$

D'autre part, $D(r)$ ne saurait prendre que des valeurs qui soient des nombres entiers; nous en concluons que $D(r)$ sera une constante, puisque c'est la différence de deux fonctions $a(r)$ et $a_0(r)$ continues

de r . On en déduit immédiatement

$$|a(r)| > [\mu(r)]^{1+p_1},$$

p_2 étant un nombre quelconque inférieur à p_1 .

Dès lors, l'égalité

$$R_1 e^{at} = e^{\theta_n} e^{t(\theta_n + \pi)}$$

entraîne la suivante

$$|\theta_n| > [\mu(r)]^{1+p_2} \quad (p_2 < p_1 \text{ mais quelconque}),$$

ce qui est en contradiction avec le résultat plus haut cité de M. Borel exprimé par l'inégalité

$$|\theta_n| < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

β étant arbitrairement petit.

Il est donc impossible qu'il y ait un nombre p tel que l'inégalité (6) soit satisfaite pour des intervalles d'étendue plus grande que celle qui a été donnée par M. Borel pour les intervalles d'exclusion que comporte son théorème, dont nous avons obtenu l'extension à la classe considérée d'algébroïdes multiformes. Nous avons le théorème suivant :

Si $M(z) = Re^{oi}$ est une algébroïde multiforme définie par une équation de la forme (5), l'inégalité

$$|\omega| < [\mu(r)]^{1+\beta}$$

sera satisfaite pour tout nombre positif β avec quelques intervalles d'exclusion négligeables. $M(z)$ est supposée d'ordre de grandeur $O(\mu(r))$.

Ce théorème entraîne comme corollaire le fait que la fonction

$$\Lambda(z) = \log M(z) = \log R + i\omega$$

satisfait aussi à l'inégalité

$$|\Lambda(z)| < [\mu(r)]^{1+\beta}.$$

Ainsi le théorème démontré par M. Borel pour le logarithme des fonctions de la forme $e^{u(z)}$, $u(z)$ étant une algébroïde uniforme entière, a été étendu ici au logarithme des algébroides multiformes $M(z)$ définies par une équation de la forme (5) qui n'admettent aussi aucun zéro et aucun infini et qui peuvent se mettre sous la forme

$$M(z) = e^{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction finie à distance finie.

Le fait que ce théorème ne saurait être étendu à toutes les algébroides apparaît immédiatement sur les algébroides les plus élémentaires, qui n'appartiennent pas à la classe particulière plus haut considérée; considérons, en effet, la fonction $\log z = \log r + i\vartheta$ (1); le module de la partie imaginaire $i\vartheta$ ne dépend pas de r et prend des valeurs indéfiniment grandes pendant que r reste constant.

Les propriétés des fonctions de classe I.

6. Si nous faisons la substitution $u = \frac{F-z}{f}$ sur l'équation (5), f désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$, l'équation transformée ne sera plus de la forme (5); ses coefficients seront de la forme d'une somme de termes tels que $f_i(z)e^{u_i(z)}$, $u_i(z)$ étant une fonction (algébroïde uniforme) entière et $f_i(z)$ une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $u_i(z)$. Si l'algébroides primitive $F(z)$, envisagée dans les paragraphes précédents, est de la forme de la transformée de (5), l'algébroides $e^{\varphi(z)}$ est de la classe définie par les équations de forme (5), et, par conséquent, le module de $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$, satisfaisant aux inégalités

$$(7') \quad |\varphi(z)| < [\mu(r)]^{1+\beta}, \quad \max. |\varphi(z)| > [\mu(r)]^{1-\beta}.$$

Si l'algébroides $F(z)$ est définie par l'équation

$$(8) \quad \mathbf{U}(z, u) = u^n + B_1(z)u^{n-1} + \dots + B_{n-1}(z)u + B_n(z) = 0,$$

(1) $\log z$ est le logarithme de l'algébroides $u = z = re^{\theta}$.

dont les coefficients sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned}\Psi(z, z_1) &= e^{u_1(z)}, & \Psi(z, z_2) &= e^{u_2(z)}, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \Psi(z, z_{n-1}) &= e^{u_{n-1}(z)}, & \Psi(z, z_n) &= e^{u_n(z)},\end{aligned}$$

elle admet n valeurs exceptionnelles z_1, z_2, \dots, z_n et les coefficients $B_i(z)$ sont de la forme

$$B_i(z) = \lambda_{i,1} e^{u_1(z)} + \lambda_{i,2} e^{u_2(z)} + \dots + \lambda_{i,n} e^{u_n(z)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

les $\lambda_{i,j}$ désignant des constantes; il est clair que la fonction $F(z) - \alpha^{(1)}$, qui n'admet aucun zéro et aucun infini, satisfait à une équation analogue à (8).

Or, il est aisé de prouver que cette classe d'algébroides entières et dépourvues de zéros jouit de la même propriété que la classe définie par des équations de la forme (5). Cela tient à ce que l'argument de la somme

$$(9) \quad \lambda_1 e^{u_1(z)} + \lambda_2 e^{u_2(z)} + \dots + \lambda_n e^{u_n(z)},$$

les λ_i désignant des constantes, est donné encore par la formule

$$a(r) = a_0(r) + 2k\pi i,$$

$a_0(r)$ étant une quantité (variant d'une façon continue par rapport à r) comprise entre le plus grand et le plus petit argument des termes $\lambda_i e^{u_i(z)}$. Si donc l'algébroïde considérée est de l'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$, les arguments de tous les termes de la somme (9) étant inférieurs à $[\mu(r)]^{1+\beta}$, il en sera de même de l'argument de la somme (9) et, par conséquent, de tous les coefficients de l'équation qui définit l'algébroïde en question $M(z)$.

Dès lors, les raisonnements, exposés dans le numéro précédent, montrent bien que l'argument ω de cette algébroïde $M(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|\omega| < [\mu(r)]^{1+\beta}, \quad (\beta, \text{ arbitrairement petit})$$

(¹) α est supposé égal à un des nombres exceptionnels z_1, z_2, \dots, z_n .

et le théorème du numéro précédent se trouve généralisé et établi pour toutes les algébroides définies par une équation dont les coefficients sont de la forme (9), quel que soit l'entier m . Pour abrégier le langage, nous appellerons *exponentielle* cette classe de fonctions algébroides.

Notons que, dans la somme (9), les exposants $H_i(z)$ peuvent bien être des *constantes*.

7. Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est de la classe exponentielle, il en est de même de $F(z) - \alpha$, α étant un nombre quelconque; si α est une valeur exceptionnelle telle que

$$(10) \quad F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)},$$

$\varphi_\alpha(z)$ croîtra comme $\mu(r)$ avec le sens plusieurs fois répété; or, nous avons vu, d'après le théorème I du paragraphe 4, que la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de α ; *il y a donc là une source de fonctions croissant comme $\mu(r)$, dont la dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction*; leur existence est assurée par le fait qu'il y a des algébroides de la classe exponentielle admettant plusieurs valeurs exceptionnelles du caractère indiqué par l'équation (10) et consistant en l'absence totale de zéros et d'infinis; cela, qui est d'ailleurs visible, a été mis en évidence dans le numéro précédent.

Si l'algébroïde primitive $F(z)$ n'est pas de la classe exponentielle, l'ordre de grandeur de l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ est inconnu; dans ce cas, les conséquences du théorème I donnent naissance à des fonctions $\varphi_\alpha(z)$ présentant une autre propriété aussi singulière que celle qui correspond au cas où $F(z)$ est de la classe exponentielle. En effet, l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ ou bien sera d'ordre de grandeur $\mu(z)$ et alors nous aurons la même différence entre son ordre de grandeur et celui de sa dérivée que dans le cas précédent, ou bien il présentera la propriété suivante :

Si nous posons

$$\varphi_\alpha(z) = \varpi_\alpha(z) + i\omega_\alpha(z),$$

$\varpi_\alpha(z)$ étant la partie réelle de $\varphi_\alpha(z)$, la fonction $\omega_\alpha(z)$ croîtra plus

vite que la partie réelle $\Re z(z)$; j'entends par là que l'on aura

$$|\omega_z(z)| > |\mu(r)|^{1+p} \quad (p \text{ étant un nombre positif}).$$

Nous avons donc le théorème général suivant :

THÉORÈME II. — *Si $F(z)$ est une algébroïde quelconque et α une valeur exceptionnelle telle que*

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)},$$

$\varphi_\alpha(z)$ étant toujours finie à distance finie, cette dernière fonction présente (sauf pour une valeur au plus de α) une des propriétés suivantes : $\alpha!$ ou bien, $\varphi_\alpha(z)$ croissant comme $\mu(r)$, la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ croît comme $e^{\mu(r)}$; $\beta!$ ou bien sa partie imaginaire croît plus vite que sa partie réelle dans le sens plus haut indiqué.

Nous pouvons même, en précisant, exprimer ces propriétés sous la forme suivante : ou bien $\varphi'_\alpha(z)$ croît plus vite que $\varphi_\alpha(z)$, ou bien la partie imaginaire $\omega_z(z)$ de $\varphi_\alpha(z)$ croît plus vite que $e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Si, en effet, la seconde propriété existe, l'ordre de grandeur de $\varphi_\alpha(z)$ ne sera pas inférieur à $e^{\mu(r)}$, ainsi que celui de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ ⁽²⁾ et, alors, nous n'avons plus les conditions de l'impossibilité de l'identité à laquelle nous conduit l'élimination (voir le n° 4) de $F(z)$ entre les équations

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)} \quad \text{et} \quad F(z) - \alpha_1 = e^{\varphi_{\alpha_1}(z)}.$$

Remarquons encore que, lorsque $F(x)$ est de la classe exponentielle, il n'y a que le premier cas du théorème II qui se présente; dans ce cas, nous faisons l'hypothèse restrictive que la différence $F(z) - \alpha$ n'ait aucun zéro et aucun infini. Nous sommes affranchis de cette restriction dans le cas où $F(z)$ n'est pas de la classe exponentielle; la conclusion subsiste évidemment pour toute valeur exceptionnelle α ,

(1) Satisfaite pour une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment remplissant des intervalles d'étendue assez grande.

(2) Nous ne pourrions rien conclure pour la croissance de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$.

mais on a moins de précision, puisque le second cas du théorème II peut se présenter aussi bien que le premier.

L'énoncé du théorème II s'applique au cas général exprimé par l'égalité

$$F(z) - z = f_{\alpha}(z) e^{\varphi_{\alpha}(z)}$$

ou bien

$$F(z) - a(z) = f(z) e^{\varphi(z)},$$

$a(z)$ et $f_{\alpha}(z)$ désignant des algébroides d'ordre de grandeur inférieur à $e^{u(r)}$ et $\varphi_{\alpha}(z)$ et $\varphi(z)$ des fonctions toujours finies à distance finie. La chose se manifeste d'elle-même.

8. On comprend bien l'importance de ces résultats en remarquant que ce sont là des propriétés de croissance auxquelles nous ne sommes pas habitués; l'ordre de grandeur d'une fonction algébroïde n'est jamais inférieur à celui de sa dérivée et la partie réelle (sa valeur maximum) est du même ordre de grandeur que le module pour une algébroïde uniforme entière, d'après les résultats plus haut cités de M. Borel. Nous pouvons prouver ici qu'il en est de même pour toute algébroïde multiforme⁽¹⁾; considérons l'algébroïde $u = M(z)$ définie par l'équation

$$u^n + A_1(z)u^{n-1} + \dots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0$$

et supposons qu'elle soit d'ordre de grandeur $e^{u(r)}$; $\varpi_i(r, \theta)$ désignant la partie réelle de la branche u_i et $W_i(r, \theta)$ la partie imaginaire. Nous remarquons tout d'abord que les parties réelles des coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions algébriques entières des $\varpi_i(r, \theta)$ et $W_i(r, \theta)$; si donc on avait pour toutes les branches les inégalités

$$|\varpi_i| < M(r)^{1-p}, \quad |W_i| < M(r)^{1-p}, \quad M(r) = e^{u(r)},$$

il en serait de même de la partie réelle de tous les coefficients, pourvu que l'on remplace p par un nombre $p_i < p$ et quelconque. On aurait donc

$$\text{partie réelle de } A_i(z) < [M(r)]^{1-p_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

(1) Appartenant à une classe très étendue, d'ailleurs.

ce qui est impossible d'après les résultats de M. Borel sur les fonctions entières (algébroides uniformes), puisque les coefficients $A_i(z)$ ne sont pas tous d'ordre de grandeur inférieur à $M(r) = e^{u(r)}$. On ne compte pas ici, bien entendu, quelques intervalles d'exclusion négligeables. Nous en concluons qu'il y aura une des inégalités

$$(11) \quad \begin{cases} \max. \varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \\ \max. W_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui sera satisfaite, sauf les intervalles d'exclusion négligeables.

Ce résultat n'est pas visiblement complet, parce qu'il y a l'ambiguïté suivante : c'est la partie réelle ou bien la partie imaginaire d'une branche au moins qui satisfera à une inégalité de la forme (11)? Pour le moment, nous ne possédons pas le résultat complet que nous avons en vue. Il en est autrement, si nous faisons une légère restriction, en supposant que l'ordre de grandeur du coefficient $A_i(z)$ ne soit pas inférieur à $e^{u(r)}$; dans ce cas, notre but sera atteint. Si, en effet, on avait pour toutes les branches

$$|\varpi_i| < [M(r)]^{1-p} \quad [M(r) = e^{u(r)}],$$

sauf des intervalles d'exclusion négligeables, on aurait aussi

$$\max. P(r, \theta) < [M(r)]^{1-p_i} \quad (p_i < p),$$

puisque l'on a

$$P(r, \theta) = \varpi_1(r, \theta) + \varpi_2(r, \theta) + \dots + \varpi_n(r, \theta).$$

Or, cette dernière inégalité est absurde, parce que, conformément au résultat plus haut cité de M. Borel, nous avons l'inégalité

$$\max. P(r, \theta) > [M(r)]^{1-\varepsilon},$$

quelque petit que soit ε , à partir d'une valeur de r , sauf des intervalles d'exclusion négligeables. Nous sommes donc conduits à la conclusion que l'inégalité

$$\max. \varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon}$$

(¹) $P(r, \theta)$ désignant la partie réelle du coefficient $A_i(z)$.

sera satisfaite pour une, au moins, des branches, ε étant arbitrairement petit. Nous avons donc obtenu le résultat voulu. Si nous faisons la substitution $u = i\zeta$, nous démontrons que la partie imaginaire d'une branche au moins jouit aussi de la même propriété. Il n'est pas douteux qu'une nouvelle tâche pourra lever la petite restriction que nous venons de faire.

L'extension d'un théorème de M. Hadamard.

9. Dans le cours des considérations précédentes, nous avons fait de nombreuses applications du théorème bien connu de M. Hadamard sur la relation qui existe entre l'ordre de grandeur d'une algébroïde entière (dont une limite supérieure est donnée) et la densité des zéros, en supposant qu'il soit étendu aux algébroides multiformes. Je me propose d'exposer dans ce Chapitre la preuve de cette extension; pour faire la démonstration voulue, il faut d'abord remarquer que, si la fonction multiforme $u = M(z)$ est définie par l'équation

$$(12) \quad A_0(z)u^n + A_1(z)u^{n-1} + \dots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

les zéros de $M(z)$ coïncident avec ceux de $A_n(z)$, qui est une fonction (uniforme) entière, et les infinis de $M(z)$ coïncident avec les zéros de $A_0(z)$; mais cela ne suffit pas pour faire une comparaison de l'ordre de grandeur du produit canonique des zéros et infinis de $M(z)$ avec celui du produit canonique des zéros de $A_n(z)$ et $A_0(z)$; il faudra encore tenir compte de la différence des degrés de multiplicité. Pour nous en rendre compte, nous devons nous reporter au mode de formation du produit canonique des zéros et des infinis de $M(z)$; considérons, à cet effet, un zéro $z = b_i$ de $M(z)$ et supposons que son degré de multiplicité par rapport à $M(z)$ soit égal à

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots + \frac{p_k}{q_k} \quad (q_1 < n, q_2 < n, \dots, q_k < n),$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_k}{q_k}$ étant les degrés de multiplicité correspondant aux divers systèmes circulaires, dans lesquels se décompose l'ensemble des

branches de $u = M(z)$ qui s'annulent en $z = b_i$; la fonction uniforme $\frac{\Lambda_n(z)}{\Lambda_0(z)}$ étant égale (au signe près) au produit des diverses branches de $M(z)$, l'ordre de multiplicité du point $z = b_i$ par rapport à cette fonction, désigné par λ , satisfait à la relation

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_k,$$

si l'on suppose que les nombres q_1, q_2, \dots, q_k désignent exactement les nombres de branches qui constituent les divers systèmes circulaires correspondants, ce qui est bien légitime. D'autre part, conformément à ce que nous avons dit dans le n° 2 de ce travail, le produit canonique des zéros de $M(z)$ est égal à $[G(z)]^{\frac{1}{n!}}$, $G(z)$ désignant le produit canonique *entier* formé avec les mêmes zéros b_i ayant un degré de multiplicité égal (pour le zéro $z = b_i$) à

$$p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \dots + p_k \mu_k,$$

les μ_i donnés par les égalités suivantes :

$$\mu_1 = \frac{n!}{q_1}, \quad \mu_2 = \frac{n!}{q_2}, \quad \dots, \quad \mu_k = \frac{n!}{q_k}.$$

Les entiers μ_i étant supérieurs à l'unité, on a l'inégalité

$$p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \dots + p_k \mu_k > p_1 + p_2 + \dots + p_k,$$

laquelle montre que la densité des zéros de $G(z)$ n'est pas inférieure à celle des zéros de $\frac{\Lambda_n(z)}{\Lambda_0(z)}$. De même, les entiers $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ étant inférieurs à $n!$, nous aurons l'inégalité

$$(12) \quad p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \dots + p_k \mu_k < n! (p_1 + p_2 + \dots + p_k)$$

qui montre que la densité des zéros de la fonction entière $G(z)$ n'est pas supérieure à celle des zéros de la fonction $\left[\frac{\Lambda_n(z)}{\Lambda_0(z)} \right]^{n!}$ dont l'ordre de grandeur n'est pas supérieur à $e^{n!}$ [qui est l'ordre de grandeur de l'algébroïde $M(z)$ donnée par l'équation (12)], puisqu'il en est ainsi

de la fonction $\frac{A_n(z)}{A_0(z)}$. Or, il est bien connu que M. Borel a montré que, si l'on prend les produits canoniques de genre fini ou infini d'une façon convenable, on a l'avantage que la densité des zéros atteint précisément la limite supérieure donnée par M. Hadamard comme conséquence de l'ordre de grandeur.

C'est là une propriété très importante des produits canoniques de facteurs primaires qui ne contiennent pas de facteurs exponentiels superflus; ce sont ces produits canoniques que j'envisage ici. Il en résulte que la densité des zéros de $G(z)$ n'est pas supérieure à celle que fournit, pour un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$, le théorème classique de M. Hadamard précisé, de la façon précitée, par M. Borel [voir E. BOREL, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, p. 379, 380 et 381)]⁽¹⁾. Les raisonnements ci-dessus exposés nous conduisent à la conclusion que l'algébroïde uniforme $G(z)$ ne saurait croître plus vite que $e^{\mu(r)}$; il en sera donc de même de la fonction $[G(z)]^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire du produit canonique des zéros de l'algébroïde $M(z)$. Le produit canonique des infinis de la même algébroïde jouit de la même propriété et nous sommes ainsi arrivés à établir le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Le produit canonique des zéros et des infinis d'une algébroïde multiforme (ou uniforme) n'a jamais son ordre de grandeur supérieur à celui de la fonction.*

Nous avons ainsi acquis l'extension aux algébroïdes multiformes du théorème précité de MM. Hadamard et Borel; il en résulte que la décomposition de ces fonctions indiquée dans ce travail jouit aussi bien que celle des algébroïdes uniformes de la propriété avantageuse qui consiste en ce que les deux facteurs de la décomposition ne croissent pas plus vite que la fonction elle-même.

(1) Ce n'est pas surtout la densité des zéros qui nous occupe ici, parce qu'elle est étudiée et déterminée en détail dans ma thèse (*Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes*, Paris, Gauthier-Villars) et d'autres travaux. Il s'agit ici de l'ordre de grandeur du produit canonique multiforme, que nous présentons dans ce travail.

Dans ces recherches, pour fixer les idées, je me suis attaché à la définition de l'ordre de grandeur usuelle de MM. Hadamard et Borel, en mettant de côté les précisions de cette notion données par MM. Boutroux et Lindelöf pour le cas d'ordre fini et par M. Maillet pour le cas d'ordre infini. La généralisation de ces résultats serait, je pense, très aisée [voir mon travail *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, fasc. III, 1905)].

Je termine ce Chapitre par la remarque que les développements et les progrès de la théorie des algébroides multiformes, accomplis d'une façon conforme à la théorie des fonctions dites *entières* ou *méromorphes*, demandent une dénomination plus précise de ces dernières fonctions que je me propose d'appeler *algébroides uniformes entières ou non*. L'ancienne dénomination est, évidemment, insuffisante.

Classe II.

10. Nous allons maintenant faire connaître la génération d'autres fonctions jouissant d'autres propriétés de croissance d'un caractère encore plus éloigné de celui qui caractérise les fonctions élémentaires.

Posons

$$\varphi(z) = e^{\zeta(z)},$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad F(z) - \alpha = f(z) e^{\zeta(z)}$$

et remarquons que la fonction $\zeta(z)$ peut avoir des infinis, qui seraient des zéros de $\varphi(z)$, mais cela ne nous empêche pas de considérer l'ordre de grandeur de $\zeta(z)$ pour r croissant indéfiniment; il n'y a qu'à faire une exclusion du voisinage immédiat de ces points analogue à celle qui a été employée par MM. Borel et Boutroux, dans des circonstances analogues⁽¹⁾, pour nous borner à la croissance relative à la singularité essentielle de laquelle on s'approche. La dérivation de l'équation (13)

(1) E. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières et méromorphes* (Gauthier-Villars). — BOUTROUX, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Thèse de doctorat, 1903).

nous donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} F'(z) = [f'(z) + f(z)e^{\zeta(z)}\zeta'(z)]e^{\varphi(z)} \\ \text{ou bien} \\ \zeta'(z) = \frac{F'(z)e^{-\varphi(z)} - f'(z)}{f(z)e^{\zeta(z)}}, \end{array} \right.$$

ce qui nous montre que la dérivée $\zeta'(z)$ n'est pas, en général, algébroïde, puisque, parmi les fonctions figurant dans le second membre de (14), il y en a une, $e^{\zeta(z)}$, qui ne saurait être algébroïde que dans le cas d'exception unique relatif à la classe précédente (classe I); l'ordre de grandeur de $\zeta'(z)$ a cependant un sens bien déterminé, parce qu'elle est une fonction rationnelle de fonctions d'ordre de grandeur bien déterminés; les fonctions $F'(z)$, $e^{-\varphi(z)}$, $f(z)$ et $f'(z)$ sont, en effet, algébroides et l'autre $\varphi(z) = e^{\zeta(z)}$ (1) a un ordre de grandeur déterminé égal à $\mu(r)$ si l'algébroïde primitive est de la classe exponentielle, hypothèse que nous ferons pour ce qui va suivre.

Des raisonnements identiques à ceux qui nous ont servi à la classe I montrent que la fonction

$$f'(z) + f(z)\varphi(z)\zeta'(z)$$

ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de z ; il en résulte qu'il en sera de même de $\zeta'(z)$, parce que toutes les autres fonctions $f(z)$, $f'(z)$ et $\varphi(z)$ croissent, par hypothèse, moins vite que $e^{\mu(r)}$. Remarquons seulement que $f(z)$ doit être supposée égale à une constante si l'on veut que l'ordre de grandeur de $\varphi(z)$ soit égal à $\mu(r)$; posons donc $f(z) = \gamma$ (γ étant une constante) et distinguons les deux cas suivants :

α! La fonction $\zeta(z)$ peut avoir son ordre de grandeur égal à $\log \mu(r)$

(1) Le module minimum de $\varphi(z)$ correspond au module minimum de $F(z) - \gamma$, qui est une fonction algébroïde; c'est pour cela que $\varphi(z)$ obéit aussi au théorème classique du module minimum de M. Hadamard. Nous voyons, d'ailleurs, que la partie réelle de $\varphi(z)$ est plus grande que $[\mu(r)]^{1-\varepsilon}$, lorsque l'on a

$$\left| \begin{array}{cc} F(z) & z \\ \gamma & \end{array} \right| > e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}.$$

avec le sens indiqué par les inégalités suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} (1 - \beta) \log \mu(r) < \max. |\zeta(z)| < (1 + \beta) \log \mu(r) \\ (\beta \text{ étant arbitrairement petit}) \end{cases}$$

que l'on déduit des inégalités (7') (voir le n° 6) en prenant les logarithmes des deux membres; le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(r)$ satisfera, évidemment, aux inégalités (15), mais nous ne pouvons rien savoir, *a priori*, pour le maximum du module (valeur absolue) de la partie réelle, ni pour la croissance du module de la partie imaginaire de $\zeta(z)$. Si donc nous supposons que $\zeta(r)$ croisse comme $\log \mu(r)$ et que nous excluons le cas d'exception unique où $\zeta(z)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, nous obtenons *des fonctions $\zeta(z)$ d'ordre de grandeur $m(r) = \log \mu(r)$ dont la dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$* . Il y a là une différence d'ordre de grandeur entre une fonction et sa dérivée qui est plus grande que dans la classe I.

$\beta!$ La fonction $\zeta(z)$ peut avoir un ordre de grandeur supérieur à $\log \mu(r)$; si cet ordre de grandeur est inférieur à $e^{\mu(r)}$ (plus précisément à $e^{[\mu(r)]^{1-p}}$, p étant un certain nombre), il y aura encore une différence d'ordre de grandeur, entre les fonctions $\zeta(z)$ et $\zeta'(z)$, qui peut être plus faible que dans le cas précédent, mais toujours remarquable. Si l'ordre de grandeur du module de $\zeta(z)$ est égal ou supérieur à $e^{\mu(r)}$, nous aurons alors une différence d'ordre de grandeur qui peut, *a priori*, être arbitrairement grande entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(z)$ et celui du module de la partie imaginaire, ou bien entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(z)$ et la même quantité pour la partie réelle de $-\zeta(z)$. D'une façon plus précise, dans cette hypothèse, si je pose $\zeta(z) = \zeta_1 + i\zeta_2$, ζ_1 désignant la partie réelle de $\zeta(z)$, ou bien le maximum du $|\zeta_2|$ ou bien le maximum (algébrique) de $-\zeta_1$, aura un ordre de grandeur qui n'est pas inférieur à $e^{\mu(r)}$,

$$m(r) = \log \mu(r)$$

désignant l'ordre de grandeur du maximum algébrique de ζ_1 .

Nous pouvons même remarquer que, *a priori*, le maximum de $|\zeta_2|$ et le maximum algébrique de $-\zeta_1$ peuvent avoir un ordre de grandeur indéfiniment élevé. Tous ces résultats supposent l'exclusion du cas d'exception unique que comporte le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La dérivée $\zeta'(z)$ ne saurait croître moins vite que e^{kz} , dans le sens plusieurs fois indiqué, pour plus d'une valeur de z .*

De ce théorème résultent comme conséquences les résultats ci-dessus développés sur la croissance des diverses parties de $\zeta(z)$.

II. Nous terminerons ce Chapitre par les remarques suivantes : En disant que $\zeta'(z)$ croît comme $e^{m(r)}$ dans le cas $z!$, nous entendons que $\zeta'(z)$ satisfait aux inégalités suivantes :

$$e^{\rho(1-\beta)m(r)} > \max |\zeta'(z)| < e^{\rho(1+\beta)m(r)},$$

β étant arbitrairement petit. En sacrifiant une certaine précision, on pourrait remplacer ces inégalités par les suivantes :

$$e^{[m(r)]^{1-\beta}} < \max |\zeta'(z)| < e^{[m(r)]^{1+\beta}},$$

pour avoir une analogie plus parfaite avec les propriétés des fonctions de la classe I.

Il y a lieu de poursuivre cette recherche de transcendentes non algébroides présentant des propriétés de plus en plus éloignées de celles auxquelles nous sommes habitués par les transcendentes élémentaires, mais l'avancement à des classes supérieures demanderait des développements compliqués que je laisse pour un autre travail.

Autres transcendentes de la classe II.

12. Les fonctions $\zeta(z)$, que nous avons envisagées plus haut, ont l'inconvénient de n'être pas finies à distance finie; or, nous pouvons les remplacer par d'autres dépourvues de ce défaut et ayant des pro-

priétés analogues de croissance. A cet effet, remarquons que les zéros de $\varphi(z)$, qui coïncident avec les infinis de $\zeta(z)$, ne peuvent être que des points algébriques de $\varphi(z)$, puisque cette fonction, étant le logarithme d'une algébroïde n'admettant aucun zéro et aucun infini, n'a pas des singularités transcendentes; nous pouvons donc, d'après le résultat du n° 2, former une algébroïde $a(z)$ admettant comme zéros ces points avec les mêmes degrés de multiplicité que $\varphi(z)$ et mettre $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = a(z)e^{\sigma(z)}.$$

Or, les zéros de $\varphi(z)$ satisfont à l'équation $F(z) - z = 1$, puisque nous maintenons l'hypothèse que $F(z)$ soit de la classe exponentielle ⁽¹⁾, hypothèse qui entraîne les relations

$$f(z) = 1, \quad F(z) - z = e^{\sigma(z)}.$$

Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est choisie de façon que la densité des zéros de l'équation

$$F(z) = z + 1$$

soit convenablement exceptionnelle, nous pouvons toujours nous arranger de sorte que l'algébroïde $a(z)$ ne croisse pas plus vite que $\mu(r)$; il en sera alors de même de $e^{\sigma(z)}$, ce que nous poursuivons. Mais laissons ces généralités et rappelons-nous que l'algébroïde $F(z)$ doit appartenir à la classe exponentielle, si l'on veut que la fonction $\varphi(z)$ croisse comme $\mu(r)$ d'une façon certaine; cette propriété de $F(z)$, d'appartenir à la classe exponentielle, sera réalisée, si $F(z)$ admet n valeurs exceptionnelles α_i , telles que les fonctions

$$F(z) - \alpha, \quad F(z) - \alpha_1, \quad F(z) - \alpha_2, \quad \dots, \quad F(z) - \alpha_{n-1}$$

n'admettent aucun zéro; la résolution, en effet, des équations correspondantes par rapport aux coefficients $B_k(z)$ (voir les formules du n° 6)

⁽¹⁾ Et nous voulons qu'il en soit de même de l'algébroïde $\frac{F(z) - z}{f(z)}$.

montre qu'ils auraient la forme qui caractérise la classe exponentielle.

Ici notre but exige que la valeur exceptionnelle z , soit égale à $z + 1$. Cela posé, la fonction $\varphi(z)$ n'admettra aucun zéro et l'on aura $a(z) = 1$; dès lors, $\sigma(z)$ sera toujours finie à distance finie et, si nous posons

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) + i\sigma_2(z),$$

sa partie réelle $\sigma_1(z)$ croîtra comme $m(r) = \log \mu(r)$ avec le sens indiqué dans le Chapitre précédent. Ainsi, en spécifiant davantage l'algébroïde primitive $F(z)$ en ce qui concerne ses valeurs exceptionnelles, nous obtenons le résultat désiré : *la fonction $\zeta(z)$ du Chapitre précédent devient une fonction $\sigma(z)$ toujours finie à distance finie*. La fonction $\sigma(z)$ jouit absolument des mêmes propriétés de croissance que $\zeta(z)$, ayant, en outre, l'avantage d'être toujours finie à distance finie; les raisonnements seront identiques à ceux du n° 10.

15. Tous ces résultats peuvent, dans une certaine mesure, être étendus à des fonctions $F(z) = e^{h(z)}$, $h(z)$ étant une fonction entière; si, en effet, $F(z)$ est de la classe exceptionnelle, il en est de même de $F(z) = e^{h(z)}$.

On peut même les étendre aux fonctions $F(z) = E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde de la classe exponentielle d'ordre de grandeur inférieur à $e^{k(r)}$. La différence $F(z) - E(z)$ sera, en effet, elle-même de la classe exponentielle; supposons, en effet, que $u = F(z)$ satisfasse à l'équation

$$(16) \quad \Psi(z, u) = 0$$

et que $E(z)$ satisfasse à l'équation

$$(17) \quad \Sigma(z, E) = 0,$$

et faisons dans la première la substitution $u = E + F_1$, ou bien $u = E + u_1$, qui nous conduira à l'équation

$$(18) \quad \Psi_1(z, E, u_1) = 0,$$

dont les coefficients seront de la forme qui caractérise la classe exponentielle.

L'équation (18) ne définissant pas u_1 comme fonction de z seulement, nous éliminons la variable E entre les équations (17) et (18) et nous sommes conduits à une équation

$$\Phi(z, u_1) = 0,$$

dont les coefficients sont, eux aussi, de la forme caractérisant la classe exponentielle. La différence $u_1 = u - E(z)$ sera donc aussi de la classe exponentielle; on se rend aisément compte de tout cela en se reportant au mode de l'élimination. On arrive, d'ailleurs, au même résultat par l'application de la propriété des arguments, utilisée dans l'étude des propriétés des fonctions de la classe I directement sur la relation $u = E + u_1$; il n'y a qu'à remarquer que l'argument de u_1 ne saurait avoir un ordre de grandeur supérieur à celui des arguments des fonctions $u = F(z)$ et $E(z)$ qui satisfont aux inégalités

$$\arg. F(z) < [\mu(r)]^{1+\beta}, \quad \arg. E(z) < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

β étant arbitrairement petit, parce que les fonctions $F(z)$ et $E(z)$ sont, toutes les deux, de la classe exponentielle et d'ordre non supérieur à $e^{\mu(r)}$; nous entendons par là qu'il n'y a pas de nombre p , tel que l'on ait

$$\max. |F(z)| > e^{[\mu(r)]^{1+p}}, \quad \max. |E(z)| > e^{[\mu(r)]^{1+p}}.$$

Cela posé, s'il y a deux algébroïdes E_1 et $E_2(z)$ de la classe exponentielle et d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ telles que, en posant

$$\begin{aligned} F(z) - E_1(z) &= e^{\varphi_1(z)}, & F(z) - E_2(z) &= e^{\varphi_2(z)}, \\ \varphi_1(z) &= e^{\sigma_1(z)}, & \varphi_2(z) &= e^{\sigma_2(z)}, \end{aligned}$$

les $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ou bien les $\sigma_1'(z)$ et $\sigma_2'(z)$ croissent moins vite que $e^{\mu(r)}$, une élimination nous conduirait à l'identité

$$E_2(z) - E_1(z) = e^{\sigma_1(z)} - e^{\sigma_2(z)},$$

qui remplit toutes les conditions nécessaires ⁽¹⁾ pour assurer son impossibilité.

Il n'existe donc pas plus d'une fonction algébroïde $E(z)$ de la nature ci-dessus indiquée, telle que les fonctions $\zeta'(z)$ et $\sigma(z)$ [ou bien $\zeta(z)$] correspondent croissent moins vite que $e^{B\sqrt{z}}$. Nous avons donc encore un cas d'exception unique.

De ce théorème découlent, par des raisonnements identiques à ceux des numéros précédents, les propriétés de croissance dont jouissent la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions $\sigma(z)$ et $\zeta(z)$, lorsque l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception unique.

Uniformité des résultats précédents. — Un théorème général et simple.

14. Tous les théorèmes de ce travail et du Mémoire précédent mettent en lumière l'origine profonde du *cas d'exception unique* de *M. Picard*, à laquelle nous devons nous reporter quand nous voulons en faire l'extension aux algébroïdes multiformes. Ce cas d'exception *unique*, qui est, au fond, une propriété de croissance des fonctions $\zeta(z)$, $\zeta'(z)$ et $\sigma(z)$, étudiées dans ce travail, se réduit, quand on se borne aux algébroïdes uniformes, à un abaissement de la densité des zéros et des infinis. Dans des travaux antérieurs [voir, par exemple, notre Thèse ⁽²⁾ plus haut citée], en étudiant les algébroides multiformes, nous ne nous sommes attaché qu'à cette densité des zéros et des infinis, et cela n'a pu nous fournir un cas d'exception unique; nous en avons eu plusieurs, en général, et leur nombre maximum dépend du nombre des branches de l'algébroïde.

⁽¹⁾ Elle remplit toutes les conditions nécessaires, puisque sa dérivation la ramène à une autre de la même forme avec des coefficients algébroides d'ordre de grandeur inférieur à $e^{B\sqrt{z}}$.

⁽²⁾ *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1905 et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*).

Remarquons encore que les théorèmes, établis dans ce travail et le précédent, qui comprennent comme cas particulier le théorème classique de M. Picard et ses généralisations concernant les algébroïdes uniformes, peuvent être énoncés sous une forme sommaire et simple comme une propriété de la dérivée logarithmique de la fonction $F(z) - z$ ou bien $F(z) - E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $e^{B(z)}$: il n'est pas, en effet, difficile de voir que le cas d'exception unique que comportent les théorèmes en question se caractérise toujours par la croissance de la dérivée logarithmique de $F(z) - z$ ou $F(z) - E(z)$, dont l'ordre de grandeur est inférieur à celui de $F(z)$ lorsque l'on se trouve dans le cas d'exception unique ; on s'en rend aisément compte en remarquant que, dans le cas d'exception, nous avons

$$F(z) - z = f(z)e^{\gamma z} \quad \text{ou bien} \quad F(z) - E(z) = F_1(z)e^{\Lambda(z)},$$

les fonctions $f(z)$ et $F_1(z)$ étant des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{B(z)}$ et $\gamma(z)$ et $\Lambda(z)$ toujours finies à distance finie. Nous avons encore, grâce à notre hypothèse,

$$\begin{aligned} F'(z) &= [f'(z) + f(z)\gamma'(z)]e^{\gamma(z)}, \\ F'(z) - E'(z) &= [F_1'(z) + F_1(z)\Lambda'(z)]e^{\Lambda(z)}, \end{aligned}$$

les coefficients des exponentielles étant aussi des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{B(z)}$. Il en résulte que les dérivées logarithmiques

$$\frac{F'(z)}{F(z) - z}, \quad \frac{F'(z) - E'(z)}{F(z) - E(z)}$$

sont aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{B(z)}$, d'après la définition et les propriétés de l'ordre de grandeur des algébroïdes non entières.

Inversement, nous pouvons démontrer que, si la dérivée logarithmique de $F(z) - z$ jouit de cette propriété, nous nous trouvons bien dans le cas d'exception unique.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\frac{F'(z)}{F(z) - z} = \omega(z),$$

$\omega(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $\rho^{k(r)}$; l'intégration nous donnera

$$\log[F(z) - z] = c + \int f \omega(z) dz$$

ou

$$F(z) - z = K e^{\int f \omega(z) dz} \quad [K = e^c],$$

K étant une constante. Les zéros et les infinis du second membre coïncident avec les infinis de l'exposant $\int f \omega(z) dz$ et, par conséquent, avec les infinis de l'algébroïde $\omega(z)$, dont la densité est exceptionnelle pour un ordre de grandeur égal à $\rho^{k(r)}$ (c'est-à-dire, elle est inférieure à celle que le théorème de M. Hadamard, précisé par M. Borel, fait correspondre à un ordre de grandeur égal à $\rho^{k(r)}$], puisque cette fonction est supposée d'ordre de grandeur inférieur à $\rho^{k(r)}$.

La densité, donc, des zéros et des infinis de $F(z) - z$ est bien exceptionnelle et nous aurons

$$F(z) - z = f(z) \rho^{\tilde{\tau}(z)},$$

$f(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $\rho^{k(r)}$ [$f(z)$ n'est qu'un produit canonique (multiforme, voir le n° 2) de facteurs primaires analogue à celui qui est formé par les infinis de $\omega(z)$, qui sont nécessairement simples] et $\tilde{\tau}(z)$ toujours finie à distance finie. Il en résulte

$$\frac{F'(z)}{F(z) - z} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \tilde{\tau}'(z) \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}'(z) = \frac{F'(z)}{F(z) - z} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Les deux dérivées logarithmiques du second membre ayant, par hypothèse, leur ordre de grandeur inférieur à $\rho^{k(r)}$, il en sera de même de $\tilde{\tau}'(z)$; nous obtenons donc ainsi toutes les conditions qui caractérisent le cas d'exception unique et entraînent les propriétés de croissance des fonctions $\tilde{\tau}(z)$, $\tilde{\tau}'(z)$ et $\sigma(z)$ signalées dans ce travail. Nous avons donc le théorème général suivant :

THÉORÈME V. — *La dérivée logarithmique de $F(z) - z$ ne saurait croître moins vite que $F(z)$ pour plus d'une valeur de z .*

Il en est bien de même de la fonction $F(z) - E(z)$.

Je crois utile de répéter ici que j'emploie l'ordre de grandeur de M. Borel, d'après lequel une fonction croissante $m(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{(k.r)}$, lorsque l'on a l'inégalité

$$m(r) < e^{(k.r)^{1-p}},$$

p étant un nombre positif quelconque.

Pour fixer les idées, je n'utilise pas dans ce travail les précisions d'ordre données récemment par quelques auteurs (Lindelöf, Boutroux, Maillet).

On obtient le sens de l'ordre de grandeur d'une algébroïde non entière à l'aide de l'exclusion du voisinage immédiat de ses infinis.

La démonstration de ce théorème peut se faire aussi directement de la façon suivante : supposons que, pour deux valeurs z_1 et z_2 , l'on ait

$$F(z) - z_1 = F(z) q_1(z), \quad F'(z) - z_2 = F(z) q_2(z),$$

les algébroïdes $q_1(z)$ et $q_2(z)$ étant d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$; l'élimination de $F'(z)$ entre ces deux relations nous fournirait l'identité suivante :

$$z_2 - z_1 = F(z)[q_1(z) - q_2(z)],$$

ce qui entraîne immédiatement

$$z_1 = z_2 \quad \text{et} \quad q_1(z) = q_2(z),$$

grâce aux propriétés générales des algébroïdes établies dans notre Mémoire précédent.

Il en est de même de la fonction $F(z) - E(z)$, $E(z)$ étant une algébroïde croissant moins vite que $e^{(k.r)}$ dans le sens plusieurs fois indiqué.

13. Remarquons maintenant que ce dernier mode de démonstration du théorème ci-dessus énoncé suggère plusieurs généralisations intéressantes pour la théorie des équations différentielles. Considérons

une équation différentielle

$$(19) \quad \Sigma(z, y, y', z) = 0,$$

la fonction $\Sigma(z, y, y', z)$ étant algébrique en y, y' et z et transcendante algébroïde par rapport à z d'ordre de grandeur égal à $e^{\mu r}$ (j'entends par là que le plus grand des ordres de grandeur des divers coefficients est égal à $e^{\mu r}$). Envisageons deux valeurs z_1 et z_2 de la variable z , qui est considérée ici comme un paramètre, et cherchons l'intégrale commune des équations différentielles

$$\Sigma(y, y', z, z) = 0, \quad \Sigma(y, y', z, z_2) = 0.$$

L'élimination de y' entre ces équations nous conduit à une équation

$$L(y, z, z_1, z_2) = 0,$$

algébrique en y, z_1 et z_2 , qui exprime que l'intégrale commune est une fonction algébroïde d'ordre de grandeur égal, en général, à $e^{\mu r}$; elle peut être aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu r}$ pour des valeurs de z_1 et z_2 satisfaisant à des équations algébriques en z_1 et z_2 .

Appelons E_i l'équation différentielle de la famille définie par l'équation (19) correspondante à la valeur z_i de z et remarquons que les considérations précédentes nous conduisent à la conclusion suivante :

Étant donnée une équation différentielle E_i de la famille considérée (19), il n'y a qu'un nombre fini d'autres équations de la même famille admettant une intégrale commune avec l'équation E_i d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu r}$.

Nous citons ce résultat comme un exemple de problèmes basés sur les mêmes principes que celui qui se rattache au théorème de M. Picard, dont toutes les généralisations et extensions aux algébroides multiformes (avec un cas d'exception unique) ont été résumées par le théorème du numéro précédent. Il est vrai que ce théorème se ramène à l'équation

$$F(z) - z = F(z)q_z(z) \quad \text{ou} \quad y' - z = yq_z(z)$$

écrite plus haut, qui n'est pas, en général, algébrique en z , puisque le facteur $q_z(z)$ dépend aussi de z d'une façon dont la complication est tout à fait imprévue; mais il arrive ici que les conditions exigées par le cas d'exception se décomposent en deux équations, dont l'une est *algébrique* en z_1 et z_2 ne contenant pas la variable z . Le théorème général que nous venons d'énoncer dans ce numéro comporte, en général, plusieurs cas d'exception, mais toujours en nombre *fini*.

Il y aurait une foule de problèmes analogues à celui que nous avons traité dans ce numéro, dont l'étude nous entraînerait très loin; c'est pour cela que je n'y insiste pas.



*Sur les fractions continues arithmétiques
et les nombres transcendants ;*

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — Introduction.

Soit la fraction continue

$$A = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots,$$

où a_0, a_1, a_2, \dots sont des nombres quelconques > 0 .

Si l'on prend pour ces nombres des entiers positifs, A est une fraction continue arithmétique *ordinaire* : 1° Liouville a indiqué des cas étendus où A est un nombre transcendant : ces nombres où, pour une infinité de valeurs de j , a_j croît assez vite avec j , sont les *nombres transcendants de Liouville* ; 2° les nombres A sont encore transcendants quand ce sont des fractions continues quasi-périodiques, sous certaines conditions.

On peut se demander si certaines propriétés analogues ne pourraient subsister lorsque les a_j ne sont pas des entiers positifs. Soit $a_j = b_j c_j^{-1}$, où b_j, c_j sont entiers positifs,

$$J = b_0 c_0^{-1} + 1 : b_1 c_1^{-1} + 1 : b_2 c_2^{-1} + \dots,$$

Dans ce qui suit ⁽¹⁾, j'établis diverses conditions suffisantes pour qu'une pareille fraction continue soit un nombre transcendant de Liouville, et j'indique, avec précision, des cas étendus où l'une au moins de ces conditions est satisfaite. Ainsi, les c_n étant donnés, J est un nombre de Liouville lorsque la croissance des b_n est suffisamment rapide avec n , ou que l'ordre de la suite des b_n est assez grand (théorèmes I à V).

La considération des fractions continues J divergentes peut aussi conduire à des nombres transcendants de Liouville (théorème VI).

Dans des cas étendus, les fractions continues J quasi-périodiques sont des nombres transcendents; même, sous certaines conditions, le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de ces nombres J est quasi-périodique (théorèmes VII et VIII et corollaires).

Enfin, je m'occupe un peu des fractions continues

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \dots,$$

où les g_i , h_i sont des entiers positifs pour $i > 0$ (g_0 rationnel), et qui se ramènent facilement au type J . Dans des cas étendus, que je précise, ce sont des nombres de Liouville (théorème IX et X); quand K est quasi-périodique, les périodes ayant un nombre impair de termes, la fraction J correspondante est aussi quasi-périodique dans des cas étendus.

II. — Préliminaires.

Soient $a_n > 0$, b_n , c_n quelconques > 0 , entiers ou non. Je rappelle d'abord quelques propriétés connues des fractions continues J et de leurs *pseudo-réduites* ⁽²⁾

$$J_n = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots + 1 : a_n.$$

⁽¹⁾ Je désignerai dans ce Mémoire par *I. T.* mon *Introduction à la théorie des nombres transcendents*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1906), à laquelle je ferai de fréquents renvois. Voir un résumé de mon Travail dans les *C. R.*, t. CXLIV, 1^{er} sem. 1907, p. 1020, 13 mai.

⁽²⁾ Je réserve le mot *réduite* pour le développement en fraction continue ordinaire à quotients incomplets entiers positifs de J . J'adopte l'expression de *pseudo-réduite* pour bien montrer que, en général, malgré l'apparence, les frac-

Elles s'établissent comme les propriétés analogues pour le cas où les a_n sont entiers (*I. T.*, p. 1 à 5), en supposant, bien entendu, la fraction continue convergente ⁽¹⁾, ce qui a toujours lieu quand les a_n sont ≥ 1 dès que n est assez grand. Posant

$$(1) \quad \begin{cases} P_{n+1} = P'_n a_{n+1} + P_{n-1}, & Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q_{n-1}, \\ P'_0 = a_0, & Q'_0 = 1, & P'_1 = a_0 a_1 + 1, & Q'_1 = a_1, & \text{etc.}, \\ x_{n+1} = a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \dots, \end{cases}$$

on a

$$(2) \quad \begin{aligned} J_n &= P'_n Q_{n-1}^{-1}, & P'_{n+1} Q'_n - P'_n Q'_{n+1} &= (-1)^n, \\ J &= \frac{P'_n x_{n+1} + P'_{n-1}}{Q'_n x_{n+1} + Q_{n-1}}, \\ x_{n+1} \frac{Q'_n}{Q'_{n-1}} &= \frac{J_{n-1} - J}{J - J_n} = x_{n+1} \left(\alpha_n + \frac{Q_{n-2}}{Q'_{n-1}} \right) > 0; \end{aligned}$$

J est compris entre J_{n-1} et J_n , $J - J_n$ du signe de $J_{n+1} - J_n$ et

$$(3) \quad |J - J_n| < |J_{n+1} - J_n| = (Q'_n Q'_{n+1})^{-1};$$

quand $a_n a_{n+1} \geq 1$.

$$(4) \quad |J - J_n| < |J - J_{n-1}|;$$

c'est le cas, à partir d'une certaine valeur de n , lorsque $a_n \geq 1$ à partir de cette valeur. De même

$$(5) \quad J_{n+1} - J_n = (-1)^n (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}, \quad J_n - J_{n-1} = (-1)^{n-1} (Q'_{n-1} Q'_n)^{-1},$$

$$(6) \quad \begin{cases} J_{n+1} - J_{n-1} = (-1)^{n-1} [(Q'_{n-1} Q'_n)^{-1} - (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}] \\ = (-1)^{n-1} (Q'_{n-1} Q'_n Q'_{n+1})^{-1} (Q'_{n+1} - Q'_{n-1}) \\ = (-1)^{n-1} a_{n+1} (Q'_{n-1} Q'_{n+1})^{-1}. \end{cases}$$

tions J_n pourront avoir, au point de vue arithmétique, des propriétés sensiblement différentes de celles des réduites.

⁽¹⁾ On sait qu'il faut et il suffit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Voir une démonstration simple de cette propriété due, je crois, à Stern (*J. f. Math.*, t. XXXVII) dans Stieltjes (*Ann. Fac. Toulouse*, t. VIII, 1894, J., p. 31).

La suite des quantités $J_1, J_3, \dots, J_{2p+1}, \dots$ forme donc une suite décroissante, la suite des quantités $J_0 = a_0, J_2, \dots, J_{2p}, \dots$ une suite croissante; toutes deux ont pour limite J quand la fraction continue est convergente.

On voit que P'_n et Q'_n sont des polynômes à coefficients entiers formés avec a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , du premier degré par rapport à chacun des a_i . On peut encore écrire

$$(7) \quad \varpi'_n = c_0 c_1 \dots c_n P'_n, \quad \gamma'_n = c_0 c_1 \dots c_n Q'_n, \quad J_n = P'_n Q'^{-1}_n = \varpi'_n \gamma'^{-1}_n,$$

où ϖ'_n, γ'_n sont des polynômes à coefficients entiers formés avec $b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n$,

$$(8) \quad \varpi'_{n+1} \gamma'_n - \varpi'_n \gamma'_{n+1} = (-1)^n (c_0 \dots c_n)^2 c_{n+1},$$

$$(9) \quad |J - J_n| < (Q'_n Q'_{n+1})^{-1} < (\gamma'_n \gamma'_{n+1})^{-1} (c_0 \dots c_n)^2 c_{n+1}.$$

J'évalue les limites supérieures et inférieures de Q'_n et γ'_n : (1) donne encore

$$(1) \text{ bis) } \begin{cases} Q'_n = (Q'_{n-1} a_n + Q'_{n-2} > Q'_{n-1} a_n > \dots > a_1 a_2 \dots a_n, \\ \gamma'_n > c_0 c_1 \dots c_n a_1 a_2 \dots a_n > c_0 b_1 b_2 \dots b_n. \end{cases}$$

D'autre part,

$$Q'_0 = 1, \quad Q'_1 < 1 + a_1;$$

si Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_n sont plus petits que $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$,

$$Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q'_{n-1} < (1 + a_1) \dots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}).$$

On a donc

$$(10) \quad \begin{cases} (1 + a_1) \dots (1 + a_n) > Q'_n > a_1 a_2 \dots a_n, \\ c_0 (b_1 + c_1) \dots (b_n + c_n) > \gamma'_n > c_0 b_1 \dots b_n. \end{cases}$$

Ces formules supposent seulement $a_n > 0, a_n, b_n, c_n$ étant rationnels ou non; lorsque les b_n et les c_n sont des entiers, les γ'_n et les ϖ'_n sont des entiers, et J , supposée convergente, est limite de la suite des fractions $J_n = \varpi'_n \gamma'^{-1}_n$. On remarquera que toutes les formules ci-dessus obtenues sans considérer x_{n+1} subsistent quand J diverge.

Enfin, lorsque a_n est ± 1 à partir d'une certaine valeur de n , je rappelle que (I. T., p. 3),

$$(10\text{ bis}) \quad Q_n > 2^{\frac{n-\nu}{2}},$$

où ν est fini.

II. — Sur les nombres de Liouville de la forme J.

Je suppose les b_n, c_n entiers réels et positifs.

Par définition, un nombre de Liouville réel A est la limite d'une suite de fractions rationnelles $A_n = B_n C_n^{-1}$ (B_n, C_n entiers positifs, premiers entre eux ou non) telles que, pour une infinité de valeurs n_i de n ,

$$(11) \quad 0 < |A - A_{n_i}| < C_{n_i}^{-\alpha},$$

si grand que soit le nombre positif α , les C_{n_i} n'ayant aucune limite supérieure quand n_i croît indéfiniment : c'est ce que j'appellerai la *condition de Liouville* ⁽¹⁾. Il en résulte qu'on peut choisir les n_i de façon que C_{n_i} ne décroisse pas quand n_i croît, et que, pour α et n_i assez grands, A_{n_i} est une réduite de A (I. T., p. 5, prop. 8).

Dès lors, étant donnée une quantité réelle positive A' , qu'on sait seulement être limite d'une suite de fractions rationnelles

$$A'_n = B'_n C'_n{}^{-1} \quad (B'_n, C'_n \text{ entiers}),$$

peut-on écrire une condition nécessaire pour que A' soit un nombre de Liouville?

Si l'on sait que la suite des A'_n renferme toutes les réduites, sauf un nombre fini d'entre elles, on devra exprimer que parmi les A'_n il y en a une infinité qui satisfont à la condition de Liouville, ce qui sera nécessaire et suffisant. Mais il est toujours possible de définir un

(1) Ce n'est une occasion de mentionner, pour éviter toute possibilité de confusion, et bien que cela résulte sans aucun doute, me semble-t-il, de mes calculs, que les réduites envisagées dans l'énoncé du bas de la page 44 de I. T. sont exclusivement des réduites satisfaisant à la condition de Liouville.

nombre quelconque A' comme limite d'une suite de quantités A'_n dont aucune n'est réduite. Par conséquent, *a priori*, dans le cas de la suite la plus générale A'_n , on n'a aucun moyen d'écrire une condition nécessaire pour que A soit un nombre de Liouville : il en est tout différemment quand A est donné par la suite de ses réduites (*I. T.*, p. 229). Aussi n'essaierai-je pas d'indiquer en général pour J une pareille condition nécessaire, car rien ne prouve *a priori* que, parmi les J_n , il y a toutes les réduites de J , sauf un nombre limité.

On peut toutefois écrire une condition suffisante pour que les J_n renferment une infinité de réduites. Il suffit, d'après (9), que, pour une infinité de valeurs n_i de n (*I. T.*, p. 5),

$$|J - J_{n_i}| < \frac{(c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1}}{J_{n_i} J_{n_i+1}} < (2 J_{n_i}')^{-1},$$

ou

$$(12) \quad J_{n_i+1}' > 2 J_{n_i}' (c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1}.$$

Mais, même quand cette condition est satisfaite, on ne sait toujours pas si la suite J_n renferme toutes les réduites, sauf un nombre limité.

Peut-on écrire une condition suffisante pour que J soit un nombre de Liouville?

Cette fois la réponse est affirmative. Il suffira que, parmi les J_n , il y en ait une infinité J_{n_i} qui, non seulement sont réduites, mais encore satisfont à la condition de Liouville. Il suffira donc, d'après (9),

$$|J - J_{n_i}| < (c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1} J_{n_i}'^{-1} J_{n_i+1}'^{-1} < J_{n_i}'^{-2},$$

ou

$$(13) \quad J_{n_i}'^{2-1} (c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1} < J_{n_i+1}'.$$

On déduit de là diverses conditions suffisantes dont je ferai usage : d'après (10), il suffit

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 b_1 \dots b_{n_i+1} > (c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1} c_0^{2-1} [(b_1 + c_1) \dots (b_{n_i} + c_{n_i})]^{2-1}, \\ \text{ou} \\ a_1 \dots a_{n_i+1} > c_0^2 [(1 + a_1) \dots (1 + a_{n_i})]^{2-1} (c_1 \dots c_{n_i})^2, \\ \text{ou} \\ a_{n_i+1} > c_0^2 (1 + a_1) \dots (1 + a_{n_i})^{2-1} (c_1 \dots c_{n_i})^{2+1}. \end{array} \right.$$

Quand $a_i \geq 1$, d'où $b_i \geq c_i$, à partir d'une certaine valeur i' de i , il suffit

$$c_0 b_1 \dots b_{n_i+1} > \lambda^\alpha c_0^{\alpha-1} 2^{n_i \alpha - 1} (b_1 \dots b_{n_i})^{\alpha-1} (c_0 \dots c_{n_i})^2 c_{n_i+1},$$

ou

$$(15) \quad a_{n_i+1} > \lambda^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} (b_1 \dots b_{n_i})^{\alpha-2} (c_1 \dots c_{n_i})^2 c_0^\alpha,$$

ou encore

$$(16) \quad a_{n_i+1} > \lambda^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} (a_1 \dots a_{n_i})^{\alpha-2} (c_0 \dots c_{n_i})^\alpha \quad (\lambda \text{ const.}).$$

On peut en déduire d'autres conditions suffisantes moins précises, mais plus simples.

Dans le cas de (14), soit d_i la plus grande des quantités b_i et c_i : il suffit

$$a_1 \dots a_{n_i+1} > c_0^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} (d_1 \dots d_{n_i})^{\alpha-1} (c_1 \dots c_{n_i}),$$

ou, *a fortiori*,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \dots a_{n_i+1} > c_0^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} (d_1 \dots d_{n_i})^\alpha, \\ \text{ou} \\ b_{n_i+1} > c_0^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} (d_1 \dots d_{n_i})^{\alpha-1} c_{n_i+1}. \end{array} \right.$$

Quand $a_i \geq 1$ ($i \geq i'$), soit α_n ($n \geq i'$) la plus grande des quantités a_1, a_2, \dots, a_n ; β_n, γ_n les quantités analogues pour les suites b_1, \dots, b_n d'une part, c_0, c_1, \dots, c_n d'autre part. On a $\alpha_n \geq 1, \beta_n \geq \gamma_n$; d'après (15), il suffit

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_i+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} \beta_{n_i}^{n_i(\alpha-2)} \gamma_{n_i}^{2n_i}, \\ \text{ou} \\ a_{n_i+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2 \beta_{n_i} \gamma_{n_i})^{n_i \alpha}, \end{array} \right.$$

d'après (16), il suffit

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_i+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_i \alpha - 1} \beta_{n_i}^{n_i(\alpha-2)} \gamma_{n_i}^{n_i \alpha}, \\ \text{ou} \\ a_{n_i+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2 \beta_{n_i} \gamma_{n_i})^{n_i \alpha}. \end{array} \right.$$

Ceci posé, je me reporte aux classifications des fractions continues que j'ai indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 8, 219 note (1), 228, 237), et dont je rappelle sommairement les principes généraux. J'est d'ordre (k, φ) dans la première classification quand, pour $n > c$,

$$(\omega) \quad a_n < c_k (n)^{\rho + \varepsilon},$$

et, pour une infinité de valeurs n_2 de n .

$$(\mu) \quad a_{n_2} > c_k (n_2)^{\rho - \varepsilon},$$

(k entier positif ou négatif, $\varphi > \varepsilon$, ε fixe positif aussi petit qu'on veut); il est d'ordre (k, φ) dans la deuxième classification quand on a, au lieu de ces inégalités, les inégalités

$$(\omega') \quad a_n < c_k (n)^{\rho + \varepsilon},$$

$$(\mu') \quad a_{n_2} > c_k (n_2)^{\rho - \varepsilon}$$

dans les mêmes conditions. Les valeurs a_{n_2} sont les valeurs principales ou les termes principaux de la suite des a_n , ou encore les quotients incomplets principaux de J . Quand on ne peut trouver aucun système de valeurs de k et φ tel que (ω) , (ω') aient lieu, la suite est d'ordre $+\infty$; quand il en est ainsi pour (μ) , (μ') , la suite est d'ordre $-\infty$.

I. Cas où $a_i \geq 1$ à partir d'une certaine valeur i de i . — On remarque que, lorsque les c_i sont tous égaux à 1, des inégalités analogues à (15) et (16) ont déjà été indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 228 et suiv.), et ne peuvent, comme on sait, avoir lieu, sans restriction sur le mode de croissance des a_n , que si la suite des a_n est d'ordre $> (3, 0)$ dans la première classification, d'ordre $> (2, 1)$ dans la deuxième.

A fortiori doit-il en être ainsi quand les c_i ne sont pas tous égaux à 1. De plus ces inégalités n'ont jamais lieu quand la suite des a_n est d'ordre $< (1, \infty)$ dans la première classification, ou d'ordre $< (1, 1)$ dans la deuxième.

Première classification. — L'ordre des b_n , supposé fini, est au moins égal à celui des a_n et celui des c_n , puisque $b_n \geq a_n$ et $b_n \geq c_n$ pour n assez grand.

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

LEMME 1. — *Dans la première classification, les produits $\lambda_n \mu_n$ des nombres de mêmes indices de deux suites de nombres λ_n, μ_n d'ordres finis $(k, \varphi), (k_1, \varphi_1)$, avec $(k, \varphi) \geq (k_1, \varphi_1)$ et, pour n assez grand, $\lambda_n \geq 1, \mu_n \geq 1$: 1° forment une suite d'ordre (k, φ) lorsque $k > k_1$; 2° forment une suite d'ordre $\geq (k, \varphi)$ et $\leq (k, \varphi + \varphi_1)$, lorsque $k = k_1$.*

Si l'une des deux suites est d'ordre infini, avec, pour n assez grand, $\lambda_n \geq 1, \mu_n \geq 1$, la suite des $\lambda_n \mu_n$ est d'ordre infini.

Il suffit de considérer le cas où $(k, \varphi) < +\infty$.

L'ordre de la suite $\lambda_n \mu_n$ est évidemment $\geq (k, \varphi)$.

D'autre part, quand $k_1 < k$,

$$\mu_n \leq c_{k_1}(n)^{\varphi_1 + \varepsilon} = c_k(n)^{\varepsilon_n}, \quad \lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = 0,$$

$$\lambda_n \leq c_k(n)^{\varphi + \varepsilon}, \quad \lambda_n \mu_n \leq c_k(n)^{\varphi + 2\varepsilon} \quad (n \text{ assez grand}).$$

Quand $k_1 = k$, l'ordre, qui ne peut dépasser $(k, \varphi + \varphi_1)$, peut être égal à $(k, \varphi + \varphi_1)$ si les deux suites renferment une infinité de termes principaux de même indice n_1 , car

$$\lambda_{n_1} \leq c_k(n_1)^{\varphi - \varepsilon}, \quad \mu_{n_1} \geq c_k(n_1)^{\varphi_1 - \varepsilon}, \quad \lambda_{n_1} \mu_{n_1} = c_k(n_1)^{\varphi + \varphi_1 - 2\varepsilon}.$$

Mais il peut être aussi égal à (k, φ) : en effet, soit

$$\lambda_n = c_k(n)^{\varphi_n}, \quad \mu_n = c_k(n)^{\sigma_n};$$

il suffit $\varphi_n + \sigma_n < \varphi + \varepsilon$; ceci aura lieu par exemple si les termes

$$\lambda_{2^p}, \quad \mu_{2^p+1}$$

sont principaux, λ_{2^p+1} et μ_{2^p} restant finis.

Les modifications du raisonnement relatives aux cas limites où φ ou φ_1 est nul ou infini ne présentent aucune difficulté spéciale.

C. Q. F. D.

J'applique ce lemme à la suite $b_n = a_n c_n$. On voit que l'on peut distinguer deux cas : ou bien l'ordre des b_n est plus grand que l'ordre des c_n ; ou bien l'ordre des b_n et c_n est le même, l'ordre des a_n pouvant

être le même, ou être plus petit. Je vais examiner ces deux cas successivement.

THÉORÈME I. — Soit (k, ρ) l'ordre des b_n avec $(k, \rho) > (3, 0)$, c'est-à-dire $k > 3$, ou $\rho > 0$ avec $k = 3$; quand l'ordre des c_n est $\leq (k_1, \rho_1) < (k, \rho)$, J est un nombre transcendant de Liouville.

En effet, il suffit, d'après (18), quand ρ est différent de 0 et de ∞ , la valeur b_{n_1+1} étant principale pour la suite des b_n , et ε fixe assez petit :

$$(20) \quad c_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > (kc_0)^{\alpha} 2^{n_1\alpha} c_k(n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1\alpha} c_{k_1}(n_1+1)^{\rho_1+\varepsilon},$$

dès que n_1 est assez grand. Or

$$c_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > c_{k_1}(n_1+1)^{\rho_1+\varepsilon} c_k(n_1+1)^{\varepsilon};$$

il suffit donc de montrer que

$$c_k(n_1+1) > c_k(n_1)^{n_1} > c_k(n_1)^{n_1 n_1},$$

quel que soit le nombre fixe $\mu > 0$, dès que n_1 est assez grand, c'est-à-dire que

$$(20 \text{ bis}) \quad c_{k-1}(n_1+1) > c_{k-1}(n_1)^2 > n_1^2 c_{k-1}(n_1),$$

ou

$$c_{k-2}(n_1+1) > 2 c_{k-2}(n_1).$$

Ceci a lieu pour $k = 3$; quand $k > 3$, il suffit

$$c_{k-3}(n_1+1) > 2 c_{k-3}(n_1) > \log 2 + c_{k-3}(n_1),$$

ce qui a lieu pour $k = 4$, etc.

Il y a un cas limite à examiner, celui où ρ est infini [on a $(k', 0) = (k' - 1, \infty)$] : alors, si $b_n = c_k(n)^{\rho_n}$, ρ_n n'a aucune limite supérieure quand n croît indéfiniment; on prend pour valeurs princi-

pales de b_n celles pour lesquelles φ_n est plus grand que $\varphi_1 + 2\varepsilon$, φ_{n-1} , φ_{n-2} , ..., et les calculs restent les mêmes. C. Q. F. D.

THÉORÈME H. — Soit (k, φ) l'ordre commun des b_n et des c_n , et $(k, \varphi) > (3, 0)$; J est encore un nombre transcendant de Liouville si, à la fois, φ est $\neq 0$ et $\neq \infty$, et les a_n sont d'ordre $> (k, 0)$.

Les inégalités (18) et (20 bis) montrent de suite que, lorsque k est $\neq 0$ et de ∞ , J est encore un nombre de Liouville si les a_n sont d'ordre au moins égal à (k, ε_1) (ε_1 positif aussi petit qu'on veut, mais fixe). Toutefois, le cas limite où $\varphi = 0$ ou ∞ reste un cas douteux que l'on peut, il est vrai, élucider parfois; ainsi, quand on a, dès que n est assez grand, $a_n \leq c_n^{\varepsilon_2}$, $b_n \geq c_n^{1+\varepsilon_2}$ (ε_2 comme ε_1), les conditions (19) et (20 bis) montrent encore que J est un nombre de Liouville (on prend $\varphi = \infty$, et, pour a_{n_i+1} , une valeur principale de la suite des a_n). On peut alors conclure :

COROLLAIRE I. — Quand $a_n \leq c_n^{\varepsilon_2}$ (ε_2 fixe, positif, aussi petit qu'on veut, mais fini, n assez grand), J est un nombre transcendant de Liouville dès que la suite des a_n est d'ordre fini plus grand que $(3, 0)$.

Remarque I. — Il ne faudrait pas croire que les catégories de nombres de Liouville que l'on vient de trouver renferment toutes les catégories des nombres de Liouville possibles : les conditions (18) et (19) permettent de reconnaître le contraire.

Je suppose que, dans (19), à partir d'une certaine valeur de n , $\alpha_n \geq \gamma_n$, l'ordre des a_n étant $(2, \varphi) > (2, 0)$, J sera un nombre de Liouville si

$$a_{n_i+1} > (2\alpha_{n_i})^{2n_i\alpha};$$

supposant que a_{n_i+1} soit une valeur principale de la suite des a_n ,

$$a_{n_i+1} > c_2(n_i+1)^{\varphi-\varepsilon};$$

pour que J soit un nombre de Liouville, il suffit

$$c_2(n+1)^{\varphi-\varepsilon} > (2\alpha_{n_i})^{2n_i\alpha},$$

$$(21) \quad (\varphi - \varepsilon) \alpha_{n_i+1} > 2n_i\alpha \log(2\alpha_{n_i}).$$

La limite supérieure de α_n , ainsi trouvée est évidemment toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités $a_n \geq 1$, d'ordre $(2, \varphi)$ satisfaisant à la condition (21) et de la forme $b_n c_n^{-1}$, b_n étant d'ordre $< (2, \infty)$. En effet, je détermine une suite de quantités $a'_n \geq 1$ d'ordre $(2, \varphi)$ satisfaisant à (21), ce qui est possible; je choisis les c_n entiers $\leq a'_n$, puis les b_n entiers, de façon que $a'_n \leq b_n c_n^{-1} \leq a'_n + 1$, et $a_n = b_n c_n^{-1}$. Alors la suite des a_n est d'ordre $(2, \varphi)$ et, d'après le lemme I, les b_n sont d'ordre $< (2, \infty)$. J est un nombre transcendant de Liouville qui ne rentre pas dans les catégories qu'on vient de trouver.

Remarque II. — Ce qui précède comporte diverses conséquences intéressantes : on sait que, la suite des c_n étant donnée, tout nombre positif peut se représenter par une fraction continue de la forme J [voir I. T., p. 86, et, plus loin, relations (42), (43)].

Si l'on considère l'ensemble des fractions continues illimitées J pour lesquelles les c_n sont donnés, les b_n prenant toutes les valeurs entières possibles telles que $b_n \geq c_n$, J est un nombre de Liouville dès que l'ordre des b_n ou celui des a_n est assez grand (*). Sous cette forme, on voit que les fractions continues

$$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots,$$

où les a_i sont positifs et ≥ 1 , ont une propriété arithmétique commune, que les a_i soient entiers ou non. En particulier :

COROLLAIRE II. — Quand les c_n sont d'ordre $< (3, 0)$, J est toujours un nombre transcendant de Liouville dès que les a_n sont d'ordre $> (3, 0)$.

Les c_n étant d'ordre $< (3, 0)$, si J n'est pas un nombre de Liouville, les b_n et les a_n sont d'ordre $\geq (3, 0)$.

Deuxième classification. — Je considère les deux suites de quantités

$$(22) \quad \Lambda_m = e_{k-1} (m^{2-\varepsilon})^{-1} \log a'_m, \quad C_m = e_{k-1} (m^{2-\varepsilon})^{-1} \log c'_m,$$

(*) On traitera plus loin le cas où les a_n , b_n ou c_n peuvent être d'ordre infini.

en supposant l'ordre d'une des deux suites a'_m, c'_m plus grand que (k_1, φ_1) (ε comme précédemment). Je fais un raisonnement analogue à un raisonnement connu (*I. T.*, p. 238) : je porte en abscisses m , en ordonnée la plus grande des deux quantités A_m et C_m ; j'obtiens des points P_1, P_2, \dots pour lesquels je forme un polygone joignant une infinité de ces points, d'ordonnées constamment croissantes avec m , au delà de toute limite, et laissant tous les autres points au-dessous. L'équation $y = \log \varphi_x$ (coordonnées cartésiennes) de ce polygone définit une fonction φ_x , constamment croissante ⁽¹⁾, et telle que

$$(23) \quad \begin{aligned} A_m &\leq \log \varphi_m, & C_m &\leq \log \varphi_m, \\ \log a'_{m-1} &\leq e_{k-1}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) \log \varphi_m, & \log c'_{m-1} &\leq e_{k-1}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) \log \varphi_m, \end{aligned}$$

une de ces inégalités au moins devenant une égalité pour une infinité de valeurs de m .

Quand l'ordre des a'_m est plus grand que celui des c'_m , supposé plus petit que $+\infty$, cette dernière condition est alors évidemment satisfaite pour la suite des a'_m par une infinité de valeurs m_i de m , si l'on choisit l'ordre $(k_1, \varphi_1 - \varepsilon)$ fini intermédiaire entre l'ordre des a'_m et celui des c'_m ; alors, en effet, C_m est < 1 pour m assez grand. On a même, quand $(k_1, \varphi_1) > (1, 0)$, C_m aussi petit qu'on veut pour les valeurs m_i de m en question. En effet,

$$\begin{aligned} \log c'_m &= e_{k-1}(m^{\varphi_1-2\varepsilon}), \\ e_{k-1}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) &> \omega e_{k-1}(m^{\varphi_1-2\varepsilon}), \end{aligned}$$

si grand que soit ω , dès que m est assez grand et $(k_1, \varphi_1) > (1, 0)$; car ceci a lieu pour $k_1 = 1$; pour $k_1 > 1$, il suffit

$$e_{k_1-2}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) > \omega e_{k_1-2}(m^{\varphi_1-2\varepsilon}) > \log \omega + e_{k_1-2}(m^{\varphi_1-2\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 2, \dots$. Dans ce cas,

$$(24) \quad \log(a'_{m_i} c'^{-1}_{m_i}) = (A_{m_i} - C_{m_i}) e_{k_1-1}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) - \frac{1}{2} A_{m_i} e_{k_1-1}(m^{\varphi_1-\varepsilon}) = \frac{1}{2} \log a_{m_i}.$$

(1) La méthode indiquée pour deux suites de quantités s'étend évidemment à un nombre quelconque.

On pourra d'ailleurs, dans tous les cas, que l'ordre des d'_m soit ou non infini, pour tenir compte éventuellement de l'irrégularité de la croissance des d'_m et des c'_m , dire *provisoirement* que l'ordre des d'_m est au moins égal à celui des c'_m pour une infinité de valeurs m , de m quand la première inégalité (23) devient une égalité pour les valeurs m_1 .

Ceci posé, soient a_n, b_n, c_n d'ordres plus petits que $+\infty$. J'établis ce lemme, analogue au lemme I :

LEMME II. — Dans la deuxième classification, les produits $\lambda_n \mu_n$ des nombres de même indice de deux suites de nombres λ_n, μ_n d'ordres $(k, \rho), (k_2, \rho_2)$ plus petits que $+\infty$, avec $(k, \rho) \leq (k_2, \rho_2)$ et, pour n assez grand, $\lambda_n \geq 1, \mu_n \geq 1$: 1° forment une suite d'ordre (k, ρ) lorsque $(k, \rho) \geq (1, 0)$; 2° forment une suite d'ordre (k, ρ) et $(0, \infty)$ lorsque $(k, \rho) < (0, \infty)$, d'ordre $(0, \rho)$ quand $k = 0, k_2 < 0$, d'ordre $(0, \rho + \rho_2)$ quand $k = k_2 = 0$ (1).

D'abord l'ordre de la suite des $\lambda_n \mu_n$ est $\geq (k, \rho)$.

D'autre part, soit $(k, \rho) \leq (1, 0)$: pour n assez grand,

$$\lambda_n \mu_n \leq c_k (n^{\rho+\varepsilon}) c_{k_2} (n^{\rho_2+\varepsilon}) \leq c_k (n^{\rho+\varepsilon})^2 \leq c_k (n^{\rho+2\varepsilon}),$$

car il suffit pour que ceci ait lieu, quand $k = 1$,

$$c^{2n\rho+\varepsilon} \leq e^{n\rho+2\varepsilon},$$

et, quand $k > 1$,

$$2c_{k-1} (n^{\rho+\varepsilon}) \leq c_{k-1} (n^{\rho+2\varepsilon});$$

ceci est vrai pour $k = 2$ et, lorsque $k > 2$, exige seulement

$$\log 2 + c_{k-2} (n^{\rho+\varepsilon}) \leq 2c_{k-2} (n^{\rho+\varepsilon}) \leq c_{k-2} (n^{\rho+2\varepsilon}), \quad \dots$$

La suite des $\lambda_n \mu_n$ est d'ordre (k, ρ) (2).

(1) Lorsque l'une des deux suites λ_n, μ_n est d'ordre infini, la suite des $\lambda_n \mu_n$ est évidemment d'ordre infini.

(2) Je rappelle que l'on a $(k, 0) \leq (k-1, \infty)$ (I. T., p. 10 et note II).

Soit maintenant $k = 0$, $(k, \varphi) < (0, \infty)$:

$$\lambda_n \mu_n \leq c_{k_2} (n^{\rho_2 + \varepsilon}) n^{\rho_1 + \varepsilon}.$$

Si $k_2 < 0$,

$$c_{k_2} (n^{\rho_2 + \varepsilon}) < n^\varepsilon, \quad \lambda_n \mu_n \leq n^{\rho_1 + 2\varepsilon};$$

si $k_2 = 0$,

$$\lambda_n \mu_n \leq n^{\rho_1 + \rho_2 + 2\varepsilon}.$$

Enfin, quand (k, φ) et (k_2, φ_2) sont quelconques, mais $< (0, \infty)$, l'ordre des $\lambda_n \mu_n$ est $< (0, \infty)$. C. Q. F. D.

J'applique ceci à la suite $b_n = a_n c_n$, en supposant les a_n , par suite les b_n , d'ordre $\geq (2, 1)$. On peut encore, comme pour la première classification, distinguer deux cas : ou bien l'ordre des b_n est plus grand que celui des c_n ; ou bien l'ordre des b_n est le même que celui des c_n , l'ordre des a_n pouvant être le même ou être plus petit. Je traiterai seulement le premier cas.

THÉORÈME III. — *Quand l'ordre (k, φ) des b_n est plus grand que l'ordre des c_n et que $(k, \varphi) > (2, 1)$, il est un nombre transcendant de Liouville.*

Je pose ici $b_n = a'_n$, $c_n = c'_n$, et je me sers de (18), de (23) et de (24). D'après (18) il suffit, pour une infinité de valeurs n_i de n ,

$$(25) \quad \log a_{n_i+1} > n_i \alpha \log \left(\frac{1}{2} \frac{b_{n_i}}{c_{n_i}} \right);$$

je choisis pour les valeurs n_i celles pour lesquelles

$$\log b_{n_i+1} = c_{k_i+1} [(n_i + 1)^{\rho_1 + \varepsilon}] \log \varphi_{n_i+1},$$

$(k_i, \varphi_i + \varepsilon)$ étant $< (k, \varphi)$ et plus grand que l'ordre des c_n .

Il suffit alors, d'après (24),

$$c_{k_i+1} [(n_i + 1)^{\rho_1 + \varepsilon}] \log \varphi_{n_i+1} > (n_i \alpha c_{k_i+1} (n_i^{\rho_1 + \varepsilon}) \log \varphi_{n_i}),$$

ou, *a fortiori*, puisque φ_x est croissant,

$$(26) \quad c_{k_i+1} [(n_i + 1)^{\rho_1 + \varepsilon}] > \log \left(\frac{1}{2} n_i \alpha \right) + c_{k_i+2} (n_i^{\rho_1 + \varepsilon}).$$

Quand $k_1 = 2$,

$$(n_1 + 1)^{\rho_1 - \varepsilon} - n_1^{\rho_1 - \varepsilon} = n_1^{\rho_1 - \varepsilon} \left[\left(1 + \frac{1}{n_1} \right)^{\rho_1 - \varepsilon} - 1 \right] \geq \frac{\rho_1 - \varepsilon}{2} n_1^{\rho_1 - \varepsilon - 1},$$

qui est $> \log(4n_1\alpha)$ pour n_1 assez grand, lorsque $\rho_1 > 1 + \varepsilon$; on peut toujours satisfaire à cette condition, quand les b_n sont d'ordre $> (2, 1)$ (ε assez petit).

Quand $k_1 = 3$, il suffit

$$e^{(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n_1^{\rho_1-\varepsilon}} - 1 \geq e^{\frac{\rho_1-\varepsilon}{2n_1}} - 1 > \frac{\rho_1-\varepsilon}{2} n_1^{\rho_1-\varepsilon-1} \log(4n_1\alpha),$$

ce qui a lieu pour n assez grand.

Quand $k_1 > 3$, il suffit

$$e_{k_1-2}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 4n_1\alpha e_{k_1-3}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}), \\ e_{k_1-3}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > \log(4n_1\alpha) + e_{k_1-3}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 4$, etc.

C. Q. F. D.

Remarque. — Ici encore on peut montrer qu'il y a d'autres catégories de nombres de Liouville que ceux qu'on vient d'obtenir. Ainsi, je suppose que les a_n soient d'ordre $(k, \rho) > (1, 1)$ et $\leq (2, 1)$: pour une infinité de valeurs n_1 de n , $a_{n_1+1} > e_k(n_1^{\rho_1-\varepsilon})$; d'après (18) et (25), il suffit, pour une infinité de ces valeurs n_1 ,

$$(27) \quad e_{k-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) > n_1\alpha \log(4\beta_{n_1}), \quad (1, 1) < (k, \rho) \leq (2, 1),$$

ce qui donne pour β_{n_1} une limite supérieure toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités b_n et a_n satisfaisant à (27), b_n étant d'ordre $\leq (2, 1)$. En effet, je suppose $a_n \geq c_n$, $b_n \leq a_n^2$, $\beta_n \leq \alpha_n^2$; je détermine une suite de quantités $a'_n \geq 1$ d'ordre (k, ρ) satisfaisant à

$$e_{k-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) > 2n_1\alpha \log(4\alpha_n'^2)$$

pour une infinité de valeurs n_1 de n . Je choisis les c_n entiers tels que $c_n \leq a'_n$, puis les b_n entiers de façon que

$$a'_n \leq b_n c_n^{-1} \leq a'_n + 1 \quad \text{et} \quad a_n = b_n c_n^{-1}.$$

La suite des a_n est d'ordre (k, φ) , et les b_n sont d'ordre $(k, \varphi) \leq (2, 1)$, d'après le lemme II. J est un nombre de Liouville qui ne rentre pas dans la catégorie trouvée au théorème III.

Cas où les b_n sont d'ordre infini dans les deux classifications. — Une suite de quantités d'ordre infini dans une des deux premières classifications l'est aussi dans l'autre (*I. T.*, p. 237). Il me suffit d'envisager la deuxième classification.

On pourra distinguer deux cas, suivant que la suite des c_n est d'ordre plus petit que l'infini ou d'ordre infini.

1° La suite des c_n est d'ordre plus petit que l'infini. D'après le lemme II, la suite des b_n étant d'ordre infini, il en est de même de la suite des a_n .

J'applique dès lors les formules (19) et (23) en prenant $a_m = a'_m$, $c_m = c'_m$, $(k_1, \varphi_1) > (2, 1 + \varepsilon)$, et l'ordre des c_n inférieur à $(k_1, \varphi_1 - \varepsilon)$. Il suffira, pour une infinité de valeurs n_1 ,

$$\log a_{n_1+1} > n_1 \alpha \log(4 \alpha_{n_1} \gamma_{n_1});$$

je choisis les valeurs n_1 telles que

$$\log a_{n_1+1} = e_{k_1-1} [(n_1 + 1)^{\varphi_1 - \varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1};$$

il suffira

$$(28) \quad e_{k_1-1} [(n_1 + 1)^{\varphi_1 - \varepsilon}] > 4 n_1 \alpha e_{k_1-1} (n_1^{\varphi_1 - \varepsilon}),$$

dès que n_1 est assez grand : c'est une conséquence de (26), et, par suite, J est un nombre transcendant de Liouville.

2° La suite des c_n est d'ordre infini.

On pourrait chercher ici à classer au préalable les suites de quantités d'ordre infini d'après les principes que j'ai indiqués sommairement ailleurs ⁽¹⁾, et distinguer un certain nombre de cas où une des conditions (15), (16), (18), (19) est satisfaite. Je me contenterai d'un énoncé

(1) *Bull. Soc. Math.*, t. XXXIV, 1906, p. 217-218. Dans l'application de ces principes (par exemple le Corollaire I, p. 219), l'ordre de la suite des k_n à considérer est évidemment l'ordre, en fonction de n , de la suite de celles des quantités k_n qui sont positives.

moins précis, mais probablement plus général : j'envisagerai le cas où, suivant ce que j'ai dit à propos de (23), l'ordre des a_m est au moins égal à celui ⁽¹⁾ des c_m pour une infinité de valeurs $n_1 + 1$ de n . On est encore conduit, d'après (19) et (23) à l'inégalité (28), et J est un nombre transcendant de Liouville.

En résumé :

THÉORÈME IV. — *La suite des b_n étant d'ordre infini, J est un nombre transcendant de Liouville : 1° quand les c_n sont d'ordre plus petit que l'infini; 2° quand les c_n étant d'ordre infini, l'ordre des a_n est, au sens défini plus haut à propos de la formule (23), d'ordre au moins égal à celui des c_n pour une infinité de valeurs de n .*

II. Cas où, parmi les a_i , il y en a une infinité dont la valeur est < 1 .

— Une des conditions (14) ou (17) ne peut être satisfaite que si, pour une infinité de valeurs n_1 de n , b_{n_1+1} est $> c_{n_1+1}$, et même, quand on ne fait aucune restriction sur le mode de croissance des b_n , que si la suite des b_n est d'ordre $> (2, \infty)$ dans la première classification, d'ordre $\leq (2, 1)$ dans la deuxième (I. T., p. 228 et suiv.). Les méthodes à employer restant les mêmes que tout à l'heure, j'observerai seulement ce qui suit :

ORDRES NON INFINIS : Première classification. — Quand l'ordre (k, φ) des b_n est plus grand que (k_1, φ_1) qui est plus grand que l'ordre des c_n , et $(k_1, \varphi_1) > (3, 0)$, la seconde condition (17) a lieu, b_{n_1+1} étant une valeur principale de la suite des b_n , si

$$c_k(n_1 + 1)^{\varphi} > c_n^{\alpha} 2^{n_1 \alpha} c_k(n_1)^{(\varphi + \varepsilon/n_1(\alpha + 1))} c_{k_1}(n_1 + 1)^{\varphi_1 - \varepsilon};$$

ceci est une conséquence de (20), quand on y change α en $\alpha + 2$; J est donc alors un nombre de Liouville. Le cas limite $\varphi = \infty$ n'offre pas de difficultés.

Deuxième classification. — Quand l'ordre (k, φ) des b_n est plus grand que celui des c_n et $> (2, 1)$, la seconde condition (17) conduit à une condition tout à fait analogue à (27), où \hat{c}_{n_1} , qui est la plus

⁽¹⁾ On pourrait se placer au même point de vue lorsque les a_m , les b_m et les c_m sont d'ordre plus petit que $+\infty$.

grande des quantités d_1, \dots, d_{n_1} , remplace β_{n_1} ; J est encore un nombre de Liouville.

Lorsque la suite des b_n est d'ordre infini, on distingue deux cas : 1° si la suite des c_n est d'ordre fini, d'après (24), où

$$a'_m = b_m, \quad c'_m = c_m,$$

on a

$$\log b_m c_m^{-1} \geq \frac{1}{2} \log b_m$$

pour une infinité de valeurs de m telles que

$$\log b_m = c_{k-1} (m^{\rho-1}) \log \gamma_m;$$

écrivant la seconde condition (17) pour ces valeurs $n_1 + 1$ de m , (23) conduit à une condition analogue à (28), qui a encore lieu pour n_1 assez grand. 2° Si la suite des c_n est d'ordre infini, en supposant la suite des a_n d'ordre au moins égal à celui des c_n pour une infinité de valeurs de n , on appliquera la troisième inégalité (14) et (23), avec

$$a'_m = a_m, \quad c'_m = c_m.$$

Il suffit d'après (14), et

$$\log(c_0 c_1 c_2 \dots c_{n_1})^{2+1} (n_1 + 1) (z + 1) c_{k-1} (n_1^{\rho-1}) \log \gamma_{n_1},$$

$$\log(1 + a_m) \leq 2 c_{k-1} (n_1^{\rho-1}) \log \gamma_{n_1}, \quad m \leq n_1,$$

que

$$c_{k-1} [(n_1 + 1)^{2+1} z] > c_{k-1} (n_1^{\rho-1}) \cdot \frac{1}{2} n_1 (z + 1),$$

ce qui est une conséquence de (28).

En résumé :

THÉORÈME V. — *Les théorèmes I, III et IV se conservent quand, parmi les a_i , il y en a un nombre infini qui sont < 1 ; la fraction continue est alors forcément convergente (1).*

(1) Car $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge, d'après les énoncés des théorèmes I à IV.

Je me dispense d'examiner si l'extension du théorème II est possible, et s'il y a des cas particuliers analogues à ceux qui ont été rencontrés à propos des théorèmes I à IV.

IV. — Des fonctions continues divergentes.

Je me propose de montrer rapidement que ces fractions continues peuvent aussi conduire à considérer des nombres de Liouville. Soit encore

$$J = a_0 + 1 : a_1 + \dots + 1 : a_n + \dots, \quad a_i > 0.$$

D'après (2)

$$(29) \quad \begin{cases} J_n = P'_0 Q'_0{}^{-1} + (P'_1 Q'_1{}^{-1} - P'_0 Q'_0{}^{-1}) + \dots \\ \quad + (P'_n Q'_n{}^{-1} - P'_{n-1} Q'_{n-1}{}^{-1}), \\ J_n = P'_0 Q'_0{}^{-1} + (Q'_0 Q'_1)^{-1} - (Q'_1 Q'_2)^{-1} + \dots \\ \quad + (-1)^{n-1} (Q'_n Q'_{n-1})^{-1}. \end{cases}$$

La valeur absolue des termes du second membre diminue de gauche à droite à partir du second, car

$$P'_{m-1} < P'_{m+1}, \quad Q'_{m-1} < Q'_{m+1},$$

d'après (1). Les pseudo-réduites d'ordre n pair augmentent, en restant inférieures à toutes les pseudo-réduites d'ordre n impair, qui diminuent, car

$$J_{2r} < J_{2r+2} < J_{2r+1} < J_{2r-1}.$$

Donc

$$\lim J_{2r+1} = L_2, \quad \lim J_{2r} = L_1, \quad L_2 < L_1.$$

Quand $Q'_{n-1} Q'_n$, qui croît toujours avec n , tend vers une limite λ finie > 0 , on a

$$(30) \quad L_2 = L_1 + \frac{1}{\lambda};$$

la fraction continue diverge, $Q_{2r} > Q'_n = 1$, et $Q_{2r+1} > Q'_1 = a_1$ tendent

vers des limites finies q_1 et q_2 , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ⁽¹⁾. Cette dernière condition est nécessaire, et aussi suffisante. D'après (6),

$$(31) \quad \begin{cases} J_{m+1} - J_{m-1} = (-1)^{m-1} a_{m+1} (Q'_{m-1} Q'_{m+1})^{-1} \\ \quad \quad \quad = (-1)^{m-1} [(Q'_{m-1} Q'_m)^{-1} - (Q'_m Q'_{m+1})^{-1}] \end{cases}$$

et

$$(32) \quad \begin{cases} J_{2r} = J_0 + (J_2 - J_0) + \dots + (J_{2r} - J_{2r-2}), \\ J_{2r+1} = J_1 + (J_3 - J_1) + \dots + (J_{2r+1} - J_{2r-1}). \end{cases}$$

Q'_{m+1} et Q'_{m-1} tendent vers la même limite q , égale à q_1 ou q_2 , et sont, dès que m est assez grand, $> \frac{q}{2}$ et $< 2q$. Donc, d'après (31),

$$(33) \quad \frac{a_{m+1}}{4q^2} < |J_{m+1} - J_{m-1}| < \frac{4a_{m+1}}{q^2}.$$

La somme

$$\Sigma_{m+1} = |(J_{m+1} - J_{m-1}) + (J_{m+3} - J_{m+1}) + \dots| = |L_2 - J_{m-1}|,$$

où L_2 est L_2 ou L_1 suivant que m est pair ou impair, est telle que

$$(34) \quad \Sigma_{m+1} < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+3} + \dots) < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+2} + \dots).$$

Ici, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; par conséquent, à partir d'une certaine valeur de n , on a ⁽²⁾

$$a_n < p^{-1}, \quad a_n^{-1} > p.$$

⁽¹⁾ On trouvera une démonstration dans le Mémoire précité de Stieltjes (*Ann. Fac. Toulouse*, 1894, J, p. 30 à 32), où il suffit de changer P_n en P'_n , Q_n en Q'_n , L en L_1 , L_1 en L_2 . On peut aussi consulter Otto Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Leipzig, Teubner, 1885-1886, t. II, Chap. VIII, en particulier, p. 382.

⁽²⁾ Dès lors, la suite des a_n^{-1} est d'ordre $-(0,1)$ dans les deux premières clas-

si grand que soit le nombre μ donné : on voit que, à côté de l'ordre (k, ρ) des $a_n^{-1} = c_n h_n^{-1}$, on peut envisager une quantité analogue définie de la façon suivante, avec la première ou la deuxième classification respectivement : si l'on a, pour $n > v$,

$$(35) \quad a_n^{-1} > c_l(n)^{\sigma-\varepsilon}, \quad \text{ou} \quad a_n^{-1} > c_l(n^{\sigma+\varepsilon}),$$

et, pour une infinité de valeurs n_2 de n ,

$$(36) \quad a_{n_2}^{-1} < c_l(n_2)^{\sigma+\varepsilon}, \quad \text{ou} \quad a_{n_2}^{-1} < c_l(n_2^{\sigma+\varepsilon}),$$

ε fixe positif aussi petit qu'on veut dès que v est assez grand, on pourra dire que la suite des a_n^{-1} est d'ordre minimum (l, σ) , en remplaçant alors ici l'expression « d'ordre (k, ρ) » utilisée dans les paragraphes précédents par celle d'ordre maximum (k, ρ) . Cette nouvelle dénomination ne devient nécessaire que si l'on considère simultanément l'ordre maximum et l'ordre minimum ⁽¹⁾. A l'ordre minimum correspondent évidemment une infinité de valeurs principales a_n , comme pour l'ordre maximum; l'on a $(l, \sigma) \leq (k, \rho)$.

Ceci posé, je me sers de la première classification, et je sup-

sifications, sans quoi l'on aurait, à partir d'une certaine valeur de n ,

$$a_n^{-1} > n, \quad \frac{1}{n} > a_n,$$

et la série ne serait pas convergente. Grâce à un raisonnement complémentaire analogue, on peut donc, avec ma terminologie, énoncer incidemment ce lemme :

LEMME. — Dans une série convergente à termes positifs $\sum a_n$, la suite des a_n^{-1} est d'ordre $(0, 1)$ dans les deux premières classifications.

Pour une fonction entière à termes positifs $\sum a_n z^n$, la suite des a_n^{-1} est d'ordre minimum $(1, 2)$ dans la première classification, d'ordre minimum $(1, 1)$ dans la deuxième; et réciproquement, sauf un cas douteux quand cet ordre est $(1, 1)$ dans la deuxième classification.

⁽¹⁾ L'extension aux fonctions entières est immédiate : les deux ordres se confondent pour les fonctions entières à croissance régulière. (Comp. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, passim, en particulier, p. 22 et 120.)

pose $(l, \tau) > (3, 0)$. D'après (35)

$$a_n < e_l(n)^{\varepsilon-\sigma},$$

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots < \sum_{m+1}^{\infty} e_l(n)^{\varepsilon-\sigma}.$$

Or

$$e_l(n+1)^{\sigma-\varepsilon} > 2e_l(n)^{\sigma-\varepsilon},$$

d'après (20 bis); donc :

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots < e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) < 2e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma},$$

et, d'après (34),

$$(37) \quad \Sigma_{m+1} < 8q^{-2}e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma}.$$

D'autre part, on a, d'après (7),

$$J_m = \varpi'_m \gamma'_m, \quad L_1 = \frac{\varpi'_{2r}}{\gamma'_{2r}} + \Sigma_{2r+2}, \quad L_2 = \frac{\varpi'_{2r+1}}{\gamma'_{2r+1}} + \Sigma_{2r+3}.$$

D'après (37), pour que L_1 et L_2 soient des nombres de Liouville, il suffit que

$$8q^{-2}e_l(2r+2)^{\varepsilon+\sigma} < \gamma_{2r}^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad 8q^{-2}e_l(2r+3)^{\varepsilon-\sigma} < \gamma_{2r+1}^{\frac{\alpha}{2}},$$

respectivement, pour une infinité de valeurs de r , ou encore,

$$(38) \quad 8\gamma_{2r}^{\frac{\alpha}{2}} < q^2 e_l(2r+2)^{\sigma-\varepsilon}, \quad 8\gamma_{2r+1}^{\frac{\alpha}{2}} < q^2 e_l(2r+3)^{\sigma-\varepsilon}.$$

Ici, d'après (35), à partir d'une certaine valeur de n , $e_n > b_n$; (10) donne alors $\gamma'_m < 2^m \gamma_m^{m+1}$, où γ_m est la plus grande des quantités $c_0, c_1, \dots, c_m, b_0, b_1, \dots, b_m$. Il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs paires et de valeurs impaires de m ,

$$(39) \quad 8(2^m \gamma_m^{m+1})^{\frac{\alpha}{2}} < q^2 e_l(m+2)^{\sigma-\varepsilon}.$$

Je suppose les ordres maximum et minimum des a_n égaux à (l, θ) et (l, θ_1) , l'ordre maximum des b_n au plus égal à (l, θ_2) , où $\theta, \theta_1, \theta_2$ sont

finis > 0 , $\tau = \theta_1$. Alors les ordres maximum et minimum des c_n sont égaux à (l, τ) , (l, τ_1) (lemme 1 ou raisonnements analogues), avec τ, τ_1 finis > 0 ; il suffira, pour m assez grand,

$\alpha[m \log 2 + (m+1)(\tau + \varepsilon)c_{l-1}(m)] < (\tau - \varepsilon)c_{l-1}(m+2) + \log \frac{q^2}{8}$,
ce qui résulte de (20 bis). Donc :

THÉORÈME VI. — *Lorsque J est une fraction continue divergente, les α_n^{-1} étant d'ordre maximum et minimum (l, θ) et (l, θ_1) plus grands que $(3, 0)$ et les b_n d'ordre $\leq (l, \theta_2)$, $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ étant finis et > 0 , dans la première classification, les pseudoréduites d'ordre pair et impair tendent respectivement vers des limites distinctes L_1 et L_2 qui sont des nombres transcendants de Liouville.*

Je ne m'attarde pas davantage sur les fractions continues divergentes : on pourrait trouver d'autres exemples dans les deux classifications, en s'inspirant des idées contenues dans un Mémoire antérieur : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants* (*Journ. de Mathém.*, 1904, p. 288-303). Je remarque seulement que, d'après ⁽¹⁾ un passage de Stieltjes, les pseudoréduites d'ordre pair sont les pseudoréduites d'une fraction continue convergente

$$m_0 : n_0 - m_1 : n_1 - m_2 : n_2 - \dots,$$

dont les numérateurs $-m_1, -m_2, \dots$ sont négatifs, ce qui donne le moyen de former des fractions continues convergentes de ce type et qui sont des nombres de Liouville.

V. — Des fractions continues quasi-périodiques.

Une fraction continue $J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots$ est quasi-périodique lorsque l'on peut trouver parmi les nombres a_0, a_1, a_2, \dots une infinité de suites de $s_1, s_2, \dots, s_m, \dots$ nombres a_i consécutifs et dont chacune est formée par la répétition un nombre $k_1, k_2, \dots, k_m, \dots$

⁽¹⁾ Mémoire précité, p. 3, formule (1').

aussi grand qu'on veut de fois (dès que m est assez grand) d'un même groupe ou arrangement de nombres consécutifs a_i . On sait (*I. T.*, p. 127, 131 et suiv.) que, les a_i étant entiers > 0 , lorsque k_m croît assez vite avec m par rapport à $s_m k_m^{-1}$ et au nombre z_m des nombres a_i de la partie non périodique qui précède les périodes, J est un nombre transcendant. Dans des cas étendus ⁽¹⁾, la racine carrée d'un nombre transcendant de Liouville est une fraction continue quasi-périodique.

Je vais indiquer ici des cas analogues où, J étant quasi-périodique et les $a_i = b_i c^{-1}$, entiers ou fractionnaires ≤ 1 , J est un nombre transcendant.

Je conserve les notations de ma démonstration relative au cas où a_i est entier (*I. T.*, p. 131), et je suis la même marche, en remplaçant I par J .

Si $p_i q_i^{-1}$ est la $i^{\text{ème}}$ pseudo-réduite de J et de Y_n , on a encore la formule (3₇) (*I. T.*, p. 132)

$$(3_7) \quad R_n Y_n^2 + R'_n Y_n + R''_n = 0,$$

avec

$$(4_0) \quad \begin{cases} R_n = q_{z_n} q_{z_n + \lambda_n - 1} - q_{z_n - 1} q_{z_n + \lambda_n}, \\ R'_n = -q_{z_n} p_{z_n + \lambda_n - 1} - p_{z_n} q_{z_n + \lambda_n - 1} + q_{z_n + \lambda_n} p_{z_n - 1} + q_{z_n - 1} p_{z_n + \lambda_n}, \\ R''_n = p_{z_n} p_{z_n + \lambda_n - 1} - p_{z_n - 1} p_{z_n + \lambda_n}. \end{cases}$$

Or, d'après (1) et (10), on voit que R_n , R'_n , R''_n ont leur valeur absolue limitée supérieurement en fonction de z_n , λ_n et des $z_n + \lambda_n + 1$ premières quantités a_i ($i = 0, 1, \dots, z_n + \lambda_n$).

On doit remarquer que, lorsque les a_i ne sont plus tous entiers, Y_n peut être un nombre rationnel ou quadratique, tandis qu'il est forcément quadratique quand les a_i sont entiers. Il suffit de citer la fraction continue

$$x = \frac{3}{2} + 1 : \frac{3}{2} + 1 : \frac{3}{2} + \dots, \quad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0, \quad x' = 2.$$

Il devient donc nécessaire de distinguer deux cas : Y_n est ou n'est pas rationnel.

⁽¹⁾ *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 215, théorème I et p. 219, corollaire I.

Je vais d'abord vérifier que la relation (3₇) n'est pas une identité. En effet, si

$$R_n = R'_n = R''_n = 0,$$

$$q_{z_n+\lambda_n} = \frac{q_{z_n}}{q_{z_{n-1}}} q_{z_n+\lambda_{n-1}}, \quad p_{z_n+\lambda_n} = \frac{p_{z_n}}{p_{z_{n-1}}} p_{z_n+\lambda_{n-1}},$$

$$R'_n = (p_{z_n+\lambda_{n-1}} q_{z_{n-1}} - q_{z_n+\lambda_{n-1}} p_{z_{n-1}}) \left(\frac{p_{z_n}}{p_{z_{n-1}}} - \frac{q_{z_n}}{q_{z_{n-1}}} \right) = 0.$$

Or

$$\frac{p_{z_n}}{p_{z_{n-1}}} - \frac{q_{z_n}}{q_{z_{n-1}}} = \frac{p_{z_n} q_{z_{n-1}} - p_{z_{n-1}} q_{z_n}}{p_{z_n} q_{z_{n-1}}} \neq 0,$$

d'après (2); il faudrait donc

$$\frac{p_{z_n+\lambda_{n-1}}}{q_{z_n+\lambda_{n-1}}} = \frac{p_{z_{n-1}}}{q_{z_{n-1}}},$$

ce qui est impossible, d'après (29), puisqu'il n'y a pas deux pseudo-réduites égales. Y_n sera donc déterminée par (3₇) et deux des quantités R_n , R'_n , R''_n sont $\neq 0$:

1° Y_n est rationnel, pour une infinité de valeurs de n , bien entendu. Il résulte de (3₇) que le numérateur F_n et le dénominateur G_n de Y_n mis sous forme de fraction irréductible $F_n G_n^{-1}$ sont des entiers limités en fonction de z_n , λ_n et des $z_n + \lambda_n + 1$ premières quantités b_i , c_i

$$(i = 0, 1, 2, \dots, z_n + \lambda_n),$$

d'après (7). Je me dispense de faire le calcul qui n'est pas bien difficile. Dès lors, d'après (9),

$$(1) \quad \begin{aligned} |J - p_{z_n+\lambda_n} q_{z_n+\lambda_n}^{-1}| &< q_{z_n+\lambda_n}^{-2}, & |Y_n - p_{z_n+\lambda_n} q_{z_n+\lambda_n}^{-1}| &< q_{z_n+\lambda_n}^{-2}, \\ |J - Y_n| &< 2 q_{z_n+\lambda_n}^{-2}. \end{aligned}$$

Si J n'est pas rationnel ⁽¹⁾ (et égal à Y_n), supposant qu'il y a une

⁽¹⁾ Si J est rationnel et égal à $p q^{-1}$, $|J - p_i q_i^{-1}| < q_i^{-1} q_{i+1}^{-1}$; d'après (9), $q_i q_{i+1} < q q_i c_0 c_1 \dots c_i$; d'après (10), on a, quel que soit i ,

$$a_1 a_2 \dots a_{i+1} < q c_0 c_1 \dots c_i.$$

infinité de valeurs de n , telles que k_n soit assez grand et que, d'après (10 bis),

$$q_{z_n+b_n\lambda_n} > G_n^z,$$

si grand que soit le nombre fixe z , J est un nombre transcendant de Liouville.

2° Y_n est irrationnel, pour une infinité de valeurs de n , bien entendu. Il est quadratique; (47) a encore lieu. Si J n'est pas quadratique (et égal à Y_n), on a $J - Y_n \neq 0$ et, dans (37), R_n et R_n'' sont $\neq 0$.

Je suppose J algébrique et racine d'une équation donnée $f(x) = 0$ de degré d , dont les coefficients, entiers, ont leur valeur absolue $\leq a'$; d'après (7) et (10),

$$|Y_n| |Y_n'| = |R_n'' R_n^{-1}| < |R_n''| (c_0 c_1 \dots c_{z_n})^2 c_{z_n+1} \dots c_{z_n+\lambda_n} = |R_n'' \theta_n|, \\ |Y_n'| < |MR_n'' \theta_n|,$$

M constante, le second membre ≥ 1 ,

$$|f(Y_n')| \leq a' (d+1) |MR_n'' \theta_n|^d.$$

Y_n est racine de l'équation

$$R_n \theta_n Y_n^2 + R_n' \theta_n Y_n + R_n'' \theta_n = 0,$$

à coefficients entiers. On prend $B_0 = R_n \theta_n$ et l'on conclut qu'il faut

$$|J - Y_n| \geq |M_1 a' (d+1) (MR_n R_n'' \theta_n^2)^d|^{-1}.$$

Cette inégalité sera impossible si l'on prend k_n assez grand par rapport à z_n , λ_n et aux b_i , c_i ($i \leq z_n + \lambda_n$) pour que, pour une infinité de valeurs de n ,

$$(40 \text{ bis}) \quad q_{z_n+b_n\lambda_n} > 2 |\omega R_n R_n'' \theta_n^2|^\omega,$$

si grand que soit le nombre fixe ω . Donc :

THÉORÈME VII. — Si, pour une infinité de valeurs de n , k_n di-

passer une certaine limite inférieure ⁽¹⁾ qui dépend de z_n, λ_n et des b_i, c_i , avec $a_i = b_i c_i^{-1} \geq 1$, $i \leq z_n + \lambda_n$, J est un nombre rationnel, quadratique ou transcendant.

Remarque 1. — Dans le cas où Y_n est quadratique pour une infinité de valeurs de n , telles que (40 bis) ait lieu, on peut chercher à déterminer plus exactement la nature arithmétique du nombre J supposé transcendant. Soient

$$(41) \quad J = \zeta_0 + 1 : \zeta_1 + 1 : \zeta_2 + \dots, \quad Y_n = \zeta'_0 + 1 : \zeta'_1 + 1 : \zeta'_2 + \dots,$$

où les ζ_i, ζ'_i sont entiers positifs ≥ 1 , les développements en fraction continue ordinaire de J et Y_n . Le développement $\zeta_0 + 1 : \zeta_1 + 1 : \zeta_2 + \dots$ est périodique; or, le nombre des termes de la partie non périodique du développement en fraction continue ordinaire de la racine,

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D} = \zeta_0 + 1 : \zeta_1 + \dots \quad (A \text{ entier positif non carré parfait}),$$

de

$$Lx^2 - 2Mx + N = 0$$

($D = \pm 1$, $E = \pm M$, $A = M^2 - LN$, L, M, N entiers, notations de SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5^{me} édition, Paris, Gauthier-Villars, 1885, p. 38-45) est $\frac{\log |D|}{\log 2} + 3 + 2\lambda$ ⁽²⁾ et la période a au

⁽¹⁾ On peut évidemment se proposer de trouver des limites inférieures plus précises de la croissance des k_n à l'aide des calculs précédents; je ne m'en occuperai pas.

⁽²⁾ Soit n_1 le plus petit entier tel que (Notations de Serret) $Q_{n_1}^2 > |L| = |D : D_n|$ et E_n sont positifs pour $n > n_1$; or $Q_{n_1} > 2^{\frac{n_1-2}{2}}$ (I. T., p. 3 et 42). Soit n' le plus grand entier, tel que $2^{n'-1} < |D|$; on a

$$Q_n^2 > 2^{n'-2} > |D|, \quad n' - 3 < \frac{\log |D|}{\log 2}, \quad n_1 - n'.$$

Mais, d'après le raisonnement de Serret, on peut seulement affirmer que la partie non périodique a au plus, non n_1 termes, en dehors de ζ'_0 , mais $n_1 + 2\lambda$ termes et $\zeta_{n+1} < 2\sqrt{\lambda}$ pour $n > n_1$.

plus $2A$ termes; enfin les termes de la partie non périodique ne dépassent pas $F = 2\sqrt{5}\varphi$, si φ est la plus grande des quantités $2\sqrt{A}$, $|L|$, $|M|$, $|N|$, les termes de la partie périodique ne dépassent pas $2\sqrt{A} \pm F$.

Ici, Y_n est racine de l'équation (37), qu'on peut écrire

$$T_n Y_n^2 + T'_n Y_n + T''_n = 0,$$

où T_n, T'_n, T''_n sont entiers, avec

$$L = T_n = 2R_n \theta_n, \quad -2M = T'_n = 2R'_n \theta_n, \quad N = T''_n = 2R''_n \theta_n, \\ \Lambda = M^2 - LN = \frac{1}{4}(T_n'^2 - 4T_n T''_n).$$

Ceci posé, on voit que $|J - Y_n|$ est limité supérieurement en fonction des $z_n + \lambda_n + 1$ premières quantités b_i, c_i , de z_n , de λ_n , de k_n , et inférieurement en fonction du nombre de quotients incomplets que l'on suppose communs aux développements (41).

D'autre part, d'après la formule (11), page 42, de Serret, quel que soit n ,

$$|D_n| = \frac{Q_n^2}{Q_n Q_{n+1}} \left(2\sqrt{A} + \frac{|D|}{Q_n Q_{n+1}} \right) = \frac{2\sqrt{A} Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{|D|}{Q_{n+1}^2} < 2\sqrt{A} + |D|,$$

et, d'après (4) et (5) (p. 44 de Serret), $|D_n|$ étant entier, on obtient une limite supérieure S de a_n , quel que soit n , en fonction de L, M, N , limite applicable aux $n_1 + 1$ premiers quotients. Sans trop chercher la précision, soit φ la plus grande des quantités $|D| = |L|$, $|E| = |M|$, $|D_{-1}| = |N|$ et $2\sqrt{A}$; on trouve

$$\varphi_n < 2\sqrt{5}\varphi = S.$$

Il en résulte que les quotients incomplets de la partie non périodique de $x = \frac{E + \sqrt{A}}{D}$ ne peuvent dépasser S , et même, ceux d'indice supérieur à $\frac{\log |D|}{\log 2} + 3$ ne dépassent pas $2\sqrt{A}$. Ces derniers, comme nombre et valeur, ont les mêmes limites supérieures que les quotients d'une période et jouent, à cet égard, le même rôle.

Ceci éclaircira et permettra de compléter un passage de mon article du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, page 222, si l'on observe : 1° que ν_m y est, en réalité, non le nombre des termes de la partie non périodique de X_m , comme je l'ai dit à tort, mais, à une unité près, la valeur de n à partir de laquelle D_n et E_n sont positifs; 2° que ces ν_m termes ont une limite supérieure Q_m^0 (θ_1 fini), d'après les notations de cet article.

Soient, en effet, $\frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_{m+1}'} \leq \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_{m+1}'}$ les deux premiers quotients incomplets différents de même indice, $\frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_{m+1}'}$, $\frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_{m+1}'}$ les quotients complets correspondants, $p_i' q_i'^{-1}$ les réduites de Y_n : avec mes notations (*I. T.*, p. 4),

$$J = \frac{p_m' \zeta_{m+1} + p_{m-1}'}{q_m' \zeta_{m+1} + q_{m-1}'}, \quad Y_n = \frac{p_m' \zeta_{m+1}' + p_{m-1}'}{q_m' \zeta_{m+1}' + q_{m-1}'},$$

$$|J - Y_n| = \frac{|\zeta_{m+1} - \zeta_{m+1}'|}{(q_m' \zeta_{m+1} + q_{m-1}')(q_m' \zeta_{m+1}' + q_{m-1}')} > (4q_m'^2)^{-1} |\zeta_{m+1}' - \zeta_{m+1}'|;$$

on a de plus

$$\zeta_i' \leq F + 1 < 2F, \quad \zeta_i'^{-1} > (2F)^{-1}.$$

Quand $\zeta_{m+1} < \zeta_{m+1}' \leq 2\zeta_{m+1}'$, on a

$$\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} \geq 1 + \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > 1 + (2F)^{-1} = \frac{2F+1}{2F},$$

$$\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} < \frac{3F}{2F+1}, \quad \zeta_{m+1} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > 1 - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > \frac{1}{2F+1};$$

$$\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > \frac{1}{(2F+1)\zeta_{m+1}'\zeta_{m+1}'} > \frac{1}{2(2F+1)(2F)^2} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\zeta_{m+1} > 2\zeta_{m+1}'$,

$$\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > \frac{1}{2\zeta_{m+1}'} > (4F)^{-1} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\zeta_{m+1} < \zeta_{m+1}' = \zeta_{m+1}' + \zeta_{m+2}'$,

$$\zeta_{m+1} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > (2F)^{-1},$$

$$\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} > \frac{1}{2F\zeta_{m+1}'\zeta_{m+1}'} > (2F)^{-3} > (4F)^{-3}.$$

Finalement, on a toujours $|\frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'} - \frac{\zeta_{m+1}'}{\zeta_{m+1}'}| > (4F)^{-3}$, et

$$|J - Y_n| > (4q_m'^2)^{-1} (4F)^{-3};$$

enfin, d'après (10),

$$q_m' \leq 2^m \zeta_1' \dots \zeta_m' \leq (2F)^m,$$

d'où, tenant compte de (47),

$$2q_{2n+1}^2 \dots q_n^2 > |J - Y_n| > (2^{2m+8} F^{2m+3})^{-1},$$

ou

$$2^{2m+9} F^{2m+3} > q_{x_n+k_n\lambda_n}^2 > 2^{2n+k_n\lambda_n-9}, \quad \nu \text{ fini,}$$

d'après (10 bis). Le nombre m est ainsi limité inférieurement en fonction de k_n ; comme la période du développement (41) de Y_n a au plus $2A$ termes, et la partie non périodique $3 + \frac{\log |L|}{\log 2} + 2A$ termes, on voit que, si k_n est assez grand, les développements (41) ont autant de périodes communes que l'on veut. Par conséquent :

COROLLAIRE. — *Tout étant posé comme au théorème VII, lorsque, pour une infinité de valeurs de n , Y_n est quadratique, et que k_n dépasse une certaine limite inférieure qui dépend de x_n , λ_n et des b_i, c_i ($i \leq x_n + \lambda_n$), le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de J est périodique ou quasi-périodique.*

Remarque II. — Il existe des cas étendus où l'on peut préciser un peu plus et certifier que J n'est pas rationnel, et même qu'il est transcendant.

La suite des c_i étant donnée et $c_i \geq 1$, j'admets que l'on puisse trouver un mode de représentation des nombres positifs par les fractions continues

$$\frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \frac{b_2}{c_2} + \dots,$$

où les b_i , entiers > 0 , satisfont au besoin à certaines conditions, mode tel qu'à tout nombre positif N' correspond une et *une seule* fraction continue de cette forme : ce sera le cas, comme on sait, quand $c_i = 1$; ce sera encore le cas, comme on va le voir, quand on prend $b_i > c_i c_{i-1}$ pour $i > 0$.

En effet, soit N' un nombre positif, et la suite des c_i donnée : je puis trouver b_0 entier positif tel que

$$(42) \quad N' - \frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} < \frac{1}{c_0}, \quad \varepsilon_0 > c_0, \quad b_0 = E(N' c_0) + 0,$$

puis b_1, b_2, \dots entiers positifs tels que

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 - \frac{b_1}{c_1} = \frac{1}{\varepsilon_1} < \frac{1}{c_1}, & \varepsilon_1 > c_1, & b_1 = E(c_1 \varepsilon_0) \geq c_1 c_0, \\ \varepsilon_1 - \frac{b_2}{c_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} < \frac{1}{c_2}, & \varepsilon_2 > c_2, & b_2 = E(c_2 \varepsilon_1) \geq c_2 c_1, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

On a $\varepsilon_i > c_i$, en sorte que, si la fraction continue est limitée, le dernier quotient $\varepsilon_{n-1} = b_n c_n^{-1}$ est $> c_{n-1}$.

Ce procédé donne pour tout nombre $N' > 0$ un développement unique en fraction continue, évidemment convergent, puisque $c_i \geq 1$, $a_i = b_i c_i^{-1} \geq 1$ (I. T., p. 3). Inversement, deux développements

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \frac{b_2}{c_2} + \dots, \quad N' = \frac{b'_0}{c'_0} + 1 : \frac{b'_1}{c'_1} + 1 : \frac{b'_2}{c'_2} + \dots,$$

avec $b_i, b'_i, c_i, c'_i > 0$ et $b_i \geq c_i c_{i-1}$, $b'_i \geq c'_i c'_{i-1}$, le dernier quotient ε_{n-1} , dans le cas d'une fraction continue limitée étant $> c_{n-1}$, représentent deux nombres distincts; car, si $N' = N'_1$,

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{b'_0}{c'_0} + \frac{1}{\varepsilon'_0}, \quad \varepsilon_0 \geq \frac{b_1}{c_1}, \quad \varepsilon'_0 \geq \frac{b'_1}{c'_1},$$

d'où

$$\varepsilon_0 > c_0, \quad \varepsilon'_0 > c'_0, \quad \left| \frac{b_0 - b'_0}{c_0} \right| = |\varepsilon_0^{-1} - \varepsilon'^{-1}_0| < c_0^{-1}, \quad b_0 = b'_0,$$

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b'_0}{c'_0} + 1 : \frac{b'_1}{c'_1} + 1 : \varepsilon'_1,$$

$$\frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b'_1}{c'_1} + 1 : \varepsilon'_1.$$

En vertu du même raisonnement, qui peut évidemment se continuer indéfiniment, $b_1 = b'_1$, $b_2 = b'_2$, etc. Donc $N' = N'_1$ (1).

Le développement ainsi obtenu de N' ne peut évidemment s'arrêter que si N' est rationnel : pour une certaine valeur i l'on a alors

(1) Ce qui précède reste vrai, même si les c_{i-1} sont rationnels ou irrationnels.

exactement

$$\varepsilon_{i-1} = b_i c_i^{-1} > c_{i-1}.$$

La réciproque est vraie; on le vérifie par la même méthode ⁽¹⁾ que lorsque les c_j sont égaux à 1.

Soit en effet $N' = \frac{A}{A_1}$, avec A, A_1 entiers premiers entre eux : les relations (42), (43) s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} A c_0 - A_1 b_0 = A_2 = \frac{A_1 c_0}{\varepsilon_0} < A_1, \quad \varepsilon_0 = \frac{A_1 c_0}{A_2}, \\ A_1 c_0 c_1 - A_2 b_1 = A_3 = \frac{A_2 c_1}{\varepsilon_1} < A_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{A_2 c_1}{A_3}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les A_2, A_3, \dots sont des entiers positifs qui ne peuvent diminuer indéfiniment : l'un d'eux s'annule, et N' se représente par une fraction continue limitée. Donc :

Dans le mode de développement en fraction continue défini par (42) et (43), les c_i étant entiers > 0 , les irrationnelles sont caractérisées par un développement en fraction continue illimitée.

Supposant que le développement $J = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \dots$ satisfasse aux conditions (42), (43), il en est de même de Y_n , qui n'est pas rationnel. Dès lors :

THÉORÈME VIII. — *Tout étant posé comme au théorème VII, lorsque l'on a $b_i \geq c_i c_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$), J est quadratique ou transcendant; par suite, si k_n satisfait aux conditions du corollaire précédent, le développement en fraction continue ordinaire de J est périodique ou quasi-périodique.*

On peut dans certains cas préciser un peu plus. Ainsi :

COROLLAIRE ⁽²⁾. — *Tout étant posé comme au théorème VIII, J est*

(1) SIRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5^e édition, 1885, p. 7.

(2) Voici des indications sur la démonstration.

Pour le développement en fraction continue du type (42), (43) d'une irration-

transcendant quand l'on a, pour une infinité de valeurs de i ,

$$b_i > \alpha (c_0 c_1 \dots c_{i-1})^2 c_i,$$

si grand que soit α . Ceci est le cas quand les c_i sont tous limités et que $b_i > \alpha^i$ pour une infinité de valeurs de i .

Si de plus k_n satisfait aux conditions du corollaire du théorème VII, le développement en fraction continue de J est quasi-périodique.

VI. — Autre forme de fractions continues.

Au lieu d'envisager des fractions continues de la forme J , on peut aussi considérer les fractions

$$(44) \quad K = g_0 + \frac{h_1}{g_1 + \frac{h_2}{g_2 + \dots}},$$

que j'écrirai plus simplement (les confusions de notations étant faciles à éviter)

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \dots$$

On les ramène de suite aux fractions J , car

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0 + h_1 : g_1 = g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1}, \\ g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 = g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + h_2 h_1^{-1} : g_2 \\ \quad = g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + 1 : g_2 h_1^{-1}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

nelle quadratique, les calculs de l'*Algèbre supérieure* de Serret (t. I, 1885, 5^e édition, p. 38-45) se conservent; mais $P_n Q_n^{-1}$ devient une pseudo-réduite, et l'on ne sait plus si les D_n , E_n sont entiers. La formule (11), page 42-43, et les formules (4) et (5), page 44 de cet Ouvrage donnent pour n assez grand, d'après ma formule (7),

$$2\sqrt{X} a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \dots c_{n-1}^2|^{-1}, \quad D_n > 0, \quad |E_n| < \sqrt{X},$$

et même, quel que soit n ,

$$(2\sqrt{X} : |D|) a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \dots c_{n-1}^2|^{-1};$$

ceci limite $b_n = a_n c_n$ en fonction de \sqrt{X} , $|D|$, c_0, \dots, c_{n-1}, c_n . Si les c_n sont limités, $b_n < \theta^n$, où θ est une constante convenable.

Finalement,

$$(45) \quad K = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots,$$

avec

$$(46) \quad \begin{cases} a_{2n} = g_{2n} \frac{h_1 h_3 \dots h_{2n-1}}{h_2 h_4 \dots h_{2n}}, & a_0 = g_0, \\ a_{2n+1} = g_{2n+1} \frac{h_2 h_4 \dots h_{2n}}{h_1 h_3 \dots h_{2n+1}}, & a_1 = g_1 h_1^{-1}. \end{cases}$$

Les deux fractions (44) et (45) ont mêmes pseudoréduites, et sont par conséquent à la fois convergentes ou divergentes : on peut aussi écrire

$$(47) \quad a_i = \frac{h_{i-1} h_{i-3} \dots}{h_i h_{i-2} \dots} g_i, \quad a_i a_{i-1} = g_i g_{i-1} h_i^{-1}.$$

Ces formules permettront d'appliquer les résultats précédemment trouvés pour le cas où les a_m sont rationnels > 0 aux fractions continues (44). Je me bornerai à quelques indications, en supposant g_0 rationnel > 0 , et les g_i, h_i entiers positifs pour $i > 0$.

Il n'y a qu'à se reporter aux formules (14) et (17), en observant que b_i et c_i n'y sont pas forcément premiers entre eux, et posant

$$b_i = g_i h_{i-1} h_{i-2} \dots, \quad c_i = h_i h_{i-2} \dots,$$

pour obtenir des conditions très générales suffisantes quand on veut que K soit un nombre transcendant de Liouville (1). Mais je me contenterai de faire une application des théorèmes I et suivants.

Première classification. — Je suppose que la suite des h_i soit d'ordre $\leq (k, \varphi)$ plus petit que l'ordre $(k, \varphi) > (3, 0)$ de la suite des g_i , et je prends pour g_i une valeur principale. On a $a_i = b_i c_i^{-1}$.

$$b_i \geq g_i \cdot c_k(i)^{\beta - \varepsilon}, \quad c_i \cdot c_k(i)^{\beta - \varepsilon} c_{i-1}(i-1)^{\beta - 2\varepsilon} < c_k(i)^{\beta - 2\varepsilon};$$

(1) C'est ici le lieu de rappeler que (LEGENDE, *Éléments de Géométrie*, 9^e édition, Paris, F. Didot, 1813, Note IV, p. 290, lemme I et O. STOLZ, *Algebraische Arithmetik*, t. II, p. 297) K est irrationnel si, à partir d'une certaine valeur de i , $h_i \geq g_i$, K est alors convergent, car, d'après (47), a_i ou a_{i-1} est > 1 .

il suffit en effet, prenant $(k, \rho) \leq (k, \rho - 4\varepsilon)$,

$$e_{k_1}(i-1)^{i^{\rho_1+\varepsilon}} < e_k(i)^\varepsilon$$

pour i assez grand, ce qui est une conséquence de (20 bis). Les cas limites où l'ordre des g_i est (k, ∞) avec $k \geq 3$, ou même est infini se traitent sans difficulté. D'après les théorèmes I, IV et V :

THÉOREME IX. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \dots,$$

où g_0 est rationnel > 0 , et les g_i, h_i sont entiers > 0 , est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des g_i dans la première classification est $> (3, 0)$ et $>$ l'ordre de la suite des h_i supposé plus petit que $+\infty$.

Deuxième classification. — Je suppose l'ordre des g_i plus grand que $(k, \rho) > (2, 1)$, et $(k, \rho) > (k_1, \rho_1)$ qui est plus grand que l'ordre des h_i supposé non infini. On a, en prenant pour g_i une valeur principale,

$$h_i \geq g_i \geq e_k(i^{\rho}), \quad e_i < e_{k_1}(i^{\rho_1-\varepsilon})^i < e_{k_1}(i^{\rho_1})$$

(ε comme ε), car il suffit

$$ie_{k_1-1}(i^{\rho_1-\varepsilon}) < e_{k_1-1}(i^{\rho_1});$$

prenant $k_1 \leq 2$, il suffit, quand i est assez grand,

$$\log i + e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\varepsilon}) < 2 e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\varepsilon}) < e_{k_1-2}(i^{\rho_1});$$

pour $k_1 = 2$, ceci a lieu; pour $k_1 > 2$, il suffit

$$\log i + e_{k_1-3}(i^{\rho_1-\varepsilon}) < 2 e_{k_1-3}(i^{\rho_1-\varepsilon}) < e_{k_1-3}(i^{\rho_1}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 3$, etc.

D'après les théorèmes III, IV et V, on conclut :

THÉOREME X. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \dots,$$

où g_0 est rationnel, et les g_i , h_i sont entiers, est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des g_i dans la deuxième classification est $> (2, 1)$ et plus grand que l'ordre de la suite des h_i supposé plus petit que $+\infty$.

On pourrait encore chercher des exemples de fractions continues (44) qui sont des nombres transcendants de Liouville, sans que les deux théorèmes ci-dessus leur soient applicables, ou faire d'autres applications des théorèmes I à V et de leurs corollaires; mais je ne m'y arrête pas.

Je dirai toutefois encore quelques mots du cas où (44) est périodique ou quasi-périodique.

On dira que K est périodique lorsque les suites des g_i et des h_i sont périodiques; si les deux périodes ont chacune p et q termes, soit $2r$ le plus petit commun multiple pair de p et q ; les deux suites admettent toutes deux une période de $2r$ termes. Alors

$$a_{i+2r} = \frac{g_{i+2r}}{g_{i+2r}} \frac{h_{i+2r-1} h_{i+2r-3} \dots}{h_{i+2r} h_{i+2r-2} \dots} = a_i \lambda_i,$$

où $\lambda_i = \frac{h_{i+2r-1} h_{i+2r-3} \dots h_{i+1}}{h_{i+2r} h_{i+2r-2} \dots h_{i+2}}$; soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2r}$ les termes de la période des h_i ; $h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_{i+2r}$ représentent ces termes dans l'ordre $\gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{2r}, \gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}$; λ_i est ainsi susceptible des deux valeurs inverses l'une de l'autre

$$\lambda' = \frac{\gamma_1 \gamma_3 \dots \gamma_{i+2r-1}}{\gamma_2 \gamma_4 \dots \gamma_{2r}}, \quad \lambda'' = \lambda'^{-1}.$$

Quand $\lambda' = \lambda'' = 1$, $a_{i+2r} = a_i$, et (45) est périodique: ce sera le cas en particulier quand p et q sont impairs, car les g_i et les h_i admettent une période de r termes, où r est impair $= 2s + 1$, et

$$\gamma_1 = \gamma_{2s+2}, \quad \gamma_2 = \gamma_{2s+3}, \dots, \gamma_{2s} = \gamma_{1s+1}, \quad \gamma_{2s+1} = \gamma_{1s+2} = \gamma_{1s}.$$

La suite des a_i et la fraction continue (45) ont alors une période de $2r$ termes.

On passe de là au cas où (44) est quasi-périodique, une infinité des

systèmes de périodes ayant tous dans leur période un nombre impair de termes : (45) est quasi-périodique ⁽¹⁾. On déduit de là le moyen d'appliquer les théorèmes VII et VIII et leurs corollaires aux fractions continues (44) : je ne m'y attarde pas.

(1) Sous certaines conditions évidentes relatives au nombre de termes de la partie non périodique des deux suites des g_i et des h_i .

*Formules relatives aux nombres de classes
des formes quadratiques binaires et positives;*

PAR M. G. HUMBERT.

Hermite, dans sa *Lettre à Liouville* ⁽¹⁾ et dans un Mémoire ultérieur ⁽²⁾, a donné une méthode, relativement élémentaire, pour établir les résultats classiques de Kronecker sur les nombres de classes. La méthode d'Hermite repose sur les développements en séries trigonométriques de certains quotients de fonctions thêta; il m'a semblé que sa souplesse permettrait, non seulement de retrouver, comme l'a fait l'illustre géomètre, des formules déjà connues, mais d'en obtenir de nouvelles.

C'est à cette recherche qu'est consacré le présent Mémoire, divisé en deux Parties.

Dans un premier Chapitre, je rappelle ou j'établis les développements en séries de Fourier qui seront le plus fréquemment utilisés dans la suite.

Le second Chapitre apporte un complément direct soit aux formules initiales de Kronecker, soit à celles qu'il leur a ajoutées plus tard.

Le troisième se rapporte à des formules d'une nature différente, que

(1) *Comptes rendus*, t. LIII; *Journal de Liouville*, 2^e série, t. VII; *Œuvres*, t. II, p. 109.

(2) *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2^e série, t. IX; *Œuvres*, t. II, p. 242.

j'appelle *formules du type de Liouville*, parce que ce géomètre en a fait connaître, sans démonstration d'ailleurs, les premiers exemples.

Dans le quatrième Chapitre, je donne des relations où figurent, avec les nombres de classes, certaines représentations d'un entier par la forme $x^2 - 2y^2$: c'est, je crois, la première fois qu'on voit apparaître une forme indéfinie dans les applications des fonctions elliptiques à l'Arithmétique. En particulier, je retrouve et j'établis un résultat indiqué par Stieltjes, sans aucune démonstration, dans sa correspondance avec Hermite.

Après un cinquième Chapitre, consacré à une digression arithmétique, le sixième Chapitre donne des formules où interviennent, à côté des nombres de classes, les minima des classes de même discriminant, ou les carrés de ces minima.

La deuxième Partie a trait tout entière aux applications de la transformation du troisième ordre, combinée avec la méthode d'Hermite.

J'y montre comment les formules établies dans la première Partie permettent, non seulement de démontrer, mais encore d'étendre, les relations entre les nombres de classes qui ont été déduites de la multiplication complexe de la fonction modulaire liée au tétraèdre; j'ajoute ensuite des relations d'un autre caractère, que je tire de développements nouveaux.

Je pourrai, dans un Mémoire ultérieur, apporter quelques compléments aux belles formules que M. Gierster a rattachées à la fonction de l'icosaèdre; mais je n'ose espérer que la méthode d'Hermite conduise à des relations telles que celles, si profondes et si générales, qu'a fait connaître M. Hurwitz, dans son étude des correspondances modulaires.

Observation générale. — Dans tout le Mémoire, je désignerai par $F(N)$ le nombre des classes binaires positives de discriminant N et de l'ordre propre, c'est-à-dire où les deux coefficients extrêmes ne sont pas pairs tous deux; $F_1(N)$ sera le même nombre pour les classes de l'ordre impropre (où les deux coefficients extrêmes sont pairs). Il n'est rien supposé sur la *primitivité* des formes, c'est-à-dire qu'une classe de discriminant N , de l'ordre propre, et dont les coefficients ont un diviseur commun impair, compte pour une unité dans $F(N)$; de même

une classe de l'ordre impropre, dont les coefficients ont un diviseur commun quelconque, compte pour une unité dans $F_1(N)$.

Toutefois, selon les conventions ordinaires, dans F ou dans F_1 , une classe équivalente à $a(x^2 + y^2)$ compte pour $\frac{1}{2}$; dans F_1 , une classe équivalente à $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$ compte pour $\frac{1}{3}$.

On posera aussi

$$F(N) + F_1(N) = G(N),$$

de sorte que $G(N)$ est le nombre *total* des classes de discriminant N .

Toutes ces notations sont conformes à celles de Kronecker et d'Hermite; on fera également partout

$$F(0) = 0; \quad F_1(0) = -\frac{1}{12}.$$

On posera enfin, pour simplifier,

$$F(N) + 3F_1(N) = J(N),$$

$$F(N) - 3F_1(N) = I(N),$$

$$F(N) - F_1(N) = E(N),$$

et l'on aura

$$J(0) = -\frac{1}{4}, \quad I(0) = \frac{1}{4}, \quad E(0) = \frac{1}{12}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

PRINCIPAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

I. Notations adoptées. — Pour rester en harmonie avec les premiers travaux d'Hermite, je poserai, en altérant légèrement les nota-

tions de Jacobi,

$$\begin{aligned}\Theta_1(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2miz} = 1 + 2 \sum_1 q^{m^2} \cos 2mx, \\ \Theta(x) &= \sum_{-\infty} q^{m^2} (-1)^m e^{2miz} = 1 + 2 \sum_1 q^{m^2} (-1)^m \cos 2mx, \\ \Pi_1(x) &= \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)ix} = 2 \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x, \\ \Pi(x) &= \frac{1}{i} \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m e^{(2m+1)ix} = 2 \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \sin(2m+1)x.\end{aligned}$$

Je désignerai par θ_1 , θ , τ_1 les valeurs des trois premières fonctions pour $x = 0$; par τ_1' la quantité $H'(0)$:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}, & \theta &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2}, & \tau_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}; \\ \tau_1' &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} = 2 \sum_0^{+\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}.\end{aligned}$$

On sait que $\tau_1' = \tau_1 \theta_1 \theta$.

Les relations quadratiques entre les quatre fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned}\theta^2 \Pi^2 + \theta_1^2 \Pi_1^2 - \tau_1^2 \Theta^2 &= 0, & \theta^2 \Theta^2 - \theta_1^2 \Theta_1^2 + \tau_1^2 \Pi^2 &= 0, \\ \theta^2 \Pi_1^2 + \theta_1^2 \Pi^2 - \tau_1^2 \Theta^2 &= 0, & \theta^2 \Theta_1^2 - \theta_1^2 \Theta^2 + \tau_1^2 \Pi^2 &= 0.\end{aligned}$$

La troisième, pour $x = 0$, donne la formule classique $\theta_1^4 = \theta^4 + \tau_1^4$. Rappelons aussi les formules

$$\begin{aligned}\Theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\Theta(x), & \Theta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \Theta_1(x), \\ \Pi_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\Pi(x), & \Pi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \Pi_1(x),\end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$q = e^{i\pi\tau}, \quad \lambda = e^{ix} q^{-\frac{1}{4}},$$

les relations

$$\begin{aligned}\Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) &= \lambda H_1(x), & H_1\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) &= \lambda\Theta_1(x), \\ \Theta\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) &= i\lambda H(x), & H\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) &= i\lambda\Theta(x).\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\Theta_1(x, -q) &= \Theta(x, q), & \Theta(x, -q) &= \Theta_1(x, q), \\ H_1(x, -q) &= H_1(x, q)e^{\frac{i\pi}{4}}, & H(x, -q) &= H(x, q)e^{\frac{i\pi}{4}}.\end{aligned}$$

2. Les relations différentielles classiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}H\Theta - H\Theta' &= \theta^2 H_1\Theta_1, & \Theta'H_1 - \Theta H'_1 &= \theta_1^2\Theta_1H, \\ H'H_1 - HH_1 &= \tau_1^2\Theta_1\Theta, & \Theta'\Theta_1 - \Theta\Theta'_1 &= \tau_1^2H_1H, \\ H'\Theta_1 - H\Theta'_1 &= \theta_1^2H_1\Theta, & \Theta_1H_1 - \Theta_1H'_1 &= \theta^2\Theta H.\end{aligned}$$

Si l'on désigne par θ''_1 , θ'' , τ''_1 les valeurs des dérivées secondes de Θ_1 , Θ , H_1 , pour $x = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\theta''_1 &= -4 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^2 q^{m^2}, & \theta'' &= -4 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m m^2 q^{m^2}, \\ \tau''_1 &= - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},\end{aligned}$$

on déduit, des relations différentielles, les formules

$$\tau_1\theta''_1 - \theta_1\tau''_1 = \tau_1\theta_1\theta^4, \quad \tau_1\theta'' - \theta\tau''_1 = \tau_1\theta\theta_1^4, \quad \theta_1\theta'' - \theta\theta''_1 = \theta\theta_1\tau_1^4.$$

5. On trouvera, dans le second travail d'Hermite mentionné ci-dessus, les développements en séries de Fourier des quotients des quatre fonctions thêta prises deux à deux, ainsi que ceux des expressions telles que $HH_1 : \Theta$, qui contiennent en dénominateur une de ces fonctions et en numérateur le produit de deux autres.

En dérivant les premiers développements, on obtient des formules

telles que celles-ci :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \eta_1^2 \theta_1 \theta \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta^2} &= 4 \sum_0^{\infty} 2m \frac{q^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx, \\ \eta_1^2 \theta_1 \theta \frac{\Theta \Theta_1}{\Pi^2} &= \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \sum_0^{\infty} 2m \frac{q^{2m}}{1+q^{2m}} \cos 2mx, \\ \theta_1^2 \eta_1 \theta \frac{\Pi \Theta_1}{\Theta^2} &= 4 \sum_0^{\infty} (2m+1) \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \sin (2m+1)x, \\ \theta_1^2 \eta_1 \theta \frac{\Pi \Theta_1}{\Pi^2} &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 4 \sum_0^{\infty} (-1)^m (2m+1) \frac{q^{2m+1}}{1+q^{2m+1}} \sin (2m+1)x. \end{aligned} \right.$$

Les autres formules du même type se déduisent de celles-là par les changements de x en $x + \frac{\pi}{2}$, et de q en $-q$.

4. On établit aisément, par la méthode indiquée plus bas (n° 5), les formules suivantes :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \eta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^2} &= 4 \sum_1^{\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx, \\ \eta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Theta}{\Pi^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} &= 4 \sum_1^{\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{1}{4}m+1} \left[q^{-\frac{1}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos (2m+1)x. \end{aligned} \right.$$

En y changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$, on obtient les développements des deux autres expressions analogues

$$\eta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi \Theta \Pi_1}{\Theta_1^2} \quad \text{et} \quad \eta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi \Theta \Theta_1}{\Pi_1^2}.$$

5. *Démonstration de la formule fondamentale d'Hermite.* — Cette formule est celle qui donne le développement de $\Pi^2 \Theta_1 : \Theta^2$.

Hermite l'indique sans démonstration; il est facile de l'établir par une méthode due à Liouville et utilisée par Biehler dans sa seconde Thèse ⁽¹⁾.

On considère simultanément les deux fonctions $H^2\Theta_1; \Theta^2$ et $\Theta^2H_1; H^2$, dont la seconde se déduit de la première, à un facteur exponentiel près, par le changement de x en $x + \frac{\pi\tau}{2}$.

On a

$$\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0^\infty A'_m \cos 2mx,$$

car le développement de Fourier peut se faire dans une bande parallèle à l'axe des quantités réelles, et dont les deux lignes frontières passent par les points $\frac{\pi\tau}{2}$ et $-\frac{\pi\tau}{2}$, zéros de $\Theta(x)$; de plus, la fonction à développer étant paire et ayant la période π , il ne figurera que des cosinus de multiples pairs de x .

La fonction paire $\Theta^2H_1; H^2$ devient infinie pour $x = 0$, le terme principal est $\frac{1}{x^2} \frac{\theta_1^2 \gamma_1}{\gamma_1^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{x^2} \frac{1}{\gamma_1 \theta_1^2}$; il en résulte que la fonction

$$\frac{\Theta^2H_1}{H^2} = \frac{1}{\gamma_1 \theta_1^2} \frac{1}{\tan x \sin x}$$

n'a pas de pôles dans la bande ci-dessus; comme c'est une fonction paire, changeant de signe quand on change x en $x + \pi$, on aura

$$(\alpha) \quad \gamma_1 \theta_1^2 \frac{\Theta^2H_1}{H^2} = \frac{1}{\tan x \sin x} + \sum_0^\infty B_m \cos(2m+1)x$$

et, par ce qui précède,

$$(\beta) \quad \gamma_1 \theta_1^2 \frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0^\infty A_m \cos 2mx.$$

⁽¹⁾ Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

Changeons, dans (α) , x en $x + \frac{\pi\tau}{2}$, il vient

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Pi^2 \Theta_1}{\Theta^2} e^{-ix} q^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\operatorname{tang}\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)} \\ &+ \sum_0 B_m \cos(2m+1)\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Or

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)} = i \frac{e^{i\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)} + e^{-i\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)}}{e^{i\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)} - e^{-i\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)}},$$

et, par $q = e^{i\pi\tau}$, on trouve aisément

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tang}\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right)} &= i \frac{qe^{2ix} + 1}{qe^{2ix} - 1} \left(\frac{-2i\sqrt{q}e^{ix}}{1 - qe^{2ix}} \right) \\ &= -2\sqrt{q}e^{ix}(1 + qe^{2ix}) \\ &\quad \times [1 + 2qe^{2ix} + \dots + (m+1)q^m e^{2m ix} + \dots]. \end{aligned}$$

De même

$$B_m \cos(2m+1)\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) = \frac{B_m}{2} \left[e^{(2m+1)ix} q^{\frac{2m+1}{2}} + e^{-(2m+1)ix} q^{-\frac{(2m+1)}{2}} \right].$$

Portons ces valeurs au second membre de (γ) ; dans le premier membre, remplaçons $\eta_1 \theta_1^2 \Pi^2 \Theta_1 : \Theta^2$ par son développement (β) , et égalons les coefficients de $e^{(2m-1)ix}$ et $e^{-(2m-1)ix}$ dans les deux membres. Il vient

$$\begin{aligned} A_m q^{-\frac{1}{2}} &= -4\sqrt{q}(2m-1)q^{m-1} + B_{m-1} q^{\frac{2m-1}{2}}, \\ A_{m-1} q^{-\frac{1}{2}} &= B_{m-1} q^{-\frac{2m-1}{2}}. \end{aligned}$$

Toutefois, si $m=1$, on a $A_0 q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} B_0 q^{-\frac{1}{2}}$.

L'élimination de B_{m-1} donne la relation de récurrence :

$$(\delta) \quad A_m = A_{m-1} q^{2m-1} - 4(2m-1)q^{m-\frac{1}{2}};$$

toutefois

$$(\varepsilon) \quad A_1 = 2A_0q - 4q^{1-\frac{1}{4}}.$$

Posons $A_m = a_m q^{m^2}$; on a, dans (δ) et (ε) ,

$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1} - 4(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 &= 2a_0 - 4q^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

On en tire immédiatement

$$a_m = 2a_0 - 4z_m,$$

étant posé

$$z_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

De là résultent, par les valeurs de A_m et B_m , les deux développements suivants, où l'on a remplacé a_0 par $4A$,

$$\frac{1}{4}\gamma_1\theta_1^2\frac{\Pi^2\Theta_1}{\Theta^2} = A\Theta_1(x) - \sum_1^{\infty} q^{m^2} z_m \cos 2mx,$$

$$\frac{1}{4}\gamma_1\theta_1^2\frac{\Theta^2\Pi_1}{\Pi^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + A\Pi_1(x) - \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z_m \cos(2m+1)x.$$

La première de ces formules a été donnée par Hermite (*Lettre à Liouville*).

6. *Remarque.* — *A priori*, la méthode suivie devait laisser dans les développements un terme indéterminé. Car, en cherchant à développer $(\Pi^2 + \mu\Theta^2)\Theta_1 : \Theta^2$ et $(\Theta^2 + \mu\Pi^2)\Pi_1 : \Pi^2$, on est conduit exactement aux mêmes équations que ci-dessus pour les A_m et les B_m , quelle que soit la constante μ ; donc, dans le développement de $\Pi^2\Theta_1 : \Theta^2$, par exemple, il devait figurer un terme $A\Theta_1$, dont la méthode ne pouvait donner le coefficient A .

7. *Détermination de A.* — C'est, dans la théorie d'Hermite, le

point fondamental où apparaît le nombre des classes. Nous présentons le raisonnement d'Hermite de la manière suivante.

On a (HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV, et *Œuvres*, t. II, p. 242-244) les développements :

$$\frac{1}{2} \gamma_1 \theta, \frac{\Pi}{\Theta} = \sum_0^{\infty} \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \sin(2m+1)x,$$

$$\theta, \frac{\Pi \Theta_1}{\Theta} = 2 \sum_0^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-m^2}) \sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre ces deux relations, et égalons, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier, les termes indépendants de x .

Au premier membre, le terme cherché est A ; au second membre, en vertu de la formule $2 \sin ax \sin bx = \cos(a-b)x - \cos(a+b)x$, ce sera la somme

$$\sum_0^{\infty} \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-m^2}).$$

On a ainsi

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{2m+1}{2} + \frac{(2m+1)^2}{4} - \mu^2} [1 + q^{2m+1} + \dots + q^{\mu(2m+1)} + \dots].$$

Posons $A = \sum q^{\frac{4N+3}{4}} f(4N+3)$, et cherchons à déterminer f ; N est évidemment un entier variant de 0 à ∞ .

On a, en vertu de l'expression ci-dessus de A , à poser

$$(E_1) \quad 4N+3 = (2m+1)^2 + 2(2m+1) + 4\mu(2m+1) - 4\mu^2$$

et $f(4N+3)$ est le nombre des solutions de l'équation (E_1) , avec les conditions $m \geq 0$, $\mu \geq 0$, $-m \leq \mu \leq m$.

Ecrivons (E_1)

$$(E_2) \quad 4N+3 = (2m+1)(2m+4\mu+3) - 4\mu^2$$

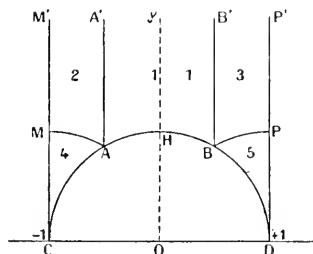
et considérons la forme φ positive, et de l'ordre propre.

$\varphi = (2m+1)x^2 + 4\mu xy + (2m+4\mu+3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$,
dont le discriminant, par (E), est $4N+3$. On a, par ce qui précède,

$$(I) \quad c > a, \quad \text{mod } b < a, \quad b \text{ pair}, \quad a \text{ et } c \text{ impairs};$$

et il y a autant d'unités dans $f(4N+3)$ qu'il y a de formes positives (a, b, c) , de l'ordre propre, satisfaisant aux conditions (I), c'est-à-dire de formes φ .

Fig. 1.



Pour calculer ce nombre, partons de la division modulaire du plan : le point représentatif de la forme (a, b, c) étant le point

$$\frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

les inégalités (I) établissent que, pour une forme φ , le point représentatif est dans l'une des régions 1, 2, 3, 4, 5, mais non sur l'arc CABD, ni sur les droites CM', DP'.

Soit maintenant $\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ une forme réduite quelconque de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; son point représentatif est, comme on sait, dans la région 1, mais ne peut être sur son contour, car $\gamma = \alpha$, ou $2\beta = \pm \alpha$, avec $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N+3$, donneraient γ et α pairs, et φ_0 serait de l'ordre impropre.

La forme φ_0 (si $\beta \neq 0$) a une équivalente, et une seule, dont le point représentatif est soit dans 2, soit dans 3; à savoir :

$$\varphi_1 = \alpha x^2 + 2(\beta \pm \alpha)xy + (\gamma \pm 2\beta + \alpha)y^2;$$

de même elle a une équivalente, dont le point représentatif est dans 4 ou dans 5,

$$\varphi_3 = \gamma x^2 + 2(-\beta \pm \gamma)xy + (\gamma \mp 2\beta + \alpha)y^2;$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondent dans φ_1 , comme dans φ_2 : si $\beta > 0$, il faut prendre dans φ_1 les signes inférieurs et dans φ_2 les supérieurs; ce sera l'inverse si $\beta < 0$.

Une et une seule des formes $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ est une forme φ , c'est-à-dire, puisque les *inégalités* (1) sont satisfaites pour toutes ces formes par la position même de leurs points représentatifs, qu'une et une seule de ces formes a son coefficient moyen pair, et ses extrêmes impairs.

C'est en effet :

φ_0 si α et γ impairs, β pair et > 0 ;

φ_1 si α impair, β impair, γ pair;

φ_2 si γ impair, β impair, α pair.

Ce Tableau épuise toutes les parités possibles pour α, β, γ , à cause de la relation $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, et de l'hypothèse que α et γ ne sont pas tous deux pairs (ordre propre).

Donc, enfin, il y a *autant de formes* φ que de réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N + 3$, en sorte qu'on trouve avec Hermite

$$f(4N + 3) = F(4N + 3),$$

$F(\Omega)$ désignant le nombre des classes de l'ordre propre de discriminant Ω .

Donc, enfin,

$$cA = \sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{3}{4}} F(4N + 3).$$

8. On traiterait de la même manière les fonctions analogues telles que $H^2H_1; \Theta^2, \Theta_1^2H_1; \Theta^2, \dots$. Pour cette dernière, la détermination du coefficient qui correspond à A est un peu plus difficile et revient aux calculs qu'a développés Hermite dans le paragraphe 3 de son second Mémoire (*Œuvres*, t. II, p. 248 et suiv.).

On obtient ainsi les *vingt-quatre formules* suivantes, qui se répartissent en trois groupes.

Premier groupe.

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Pi^2 \Theta_1}{\Theta_1^2} &= \epsilon \mathfrak{L} \Theta_1 - \sum_1^{\infty} q^{m^2} \alpha_m \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Theta_1^2 \Pi_1}{\Pi_1^2} &= \frac{\cos x}{4 \sin^2 x} + \epsilon \mathfrak{L} \Pi_1 - \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \alpha_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Pi_1^2 \Theta_1}{\Theta_1^2} &= \epsilon \mathfrak{L} \Theta - \sum_1^{\infty} q^{m^2} \alpha_m (-1)^m \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Theta_1^2 \Pi_1}{\Pi_1^2} &= \frac{\sin x}{4 \cos^2 x} + \epsilon \mathfrak{L} \Pi - \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \alpha_m (-1)^m \sin(2m+1)x. \end{aligned} \right.$$

$$\alpha_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$

$$\epsilon \mathfrak{L} = \sum_0^{\infty} q^{N+\frac{3}{4}} F(4N+3).$$

Les deux dernières formules se déduisent des premières par le changement de x en $x + \frac{\pi}{2}$.

Si maintenant on change q en $-q$, on obtient les quatre formules

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Pi^2 \Theta}{\Theta_1^2} &= -\epsilon \mathfrak{L}' e^{\frac{i\pi}{4}} \Theta + \sum_1^{\infty} q^{m^2} \alpha_m (-1)^m \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Theta_1^2 \Pi_1}{\Pi_1^2} &= \frac{\cos x}{4 \sin^2 x} + \epsilon \mathfrak{L}' e^{\frac{i\pi}{4}} \Pi_1 - \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \alpha_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Pi_1^2 \Theta_1}{\Theta_1^2} &= -\epsilon \mathfrak{L}' e^{\frac{i\pi}{4}} \Theta_1 + \sum_1^{\infty} q^{m^2} \alpha_m \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \eta_1 \theta_1^2 \frac{\Theta_1^2 \Pi_1}{\Pi_1^2} &= \frac{\sin x}{4 \cos^2 x} + \epsilon \mathfrak{L}' e^{\frac{i\pi}{4}} \Pi - \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \alpha_m (-1)^m \sin(2m+1)x, \end{aligned} \right.$$

$$\epsilon \mathfrak{L}' = \epsilon \mathfrak{L}(-q) = \sum_0^{\infty} e^{\frac{3i\pi}{4}} (-1)^N q^{N+\frac{3}{4}} F(4N+3).$$

En ajoutant membre à membre les deux formules où les premiers membres ont Θ^2 en dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{4} \gamma_1 \frac{\Theta_1}{\Theta^2} [\theta_1^2 H^2 + \theta^2 H_1^2] = (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' e^{\frac{i\pi}{4}}) \Theta_1.$$

Mais $\theta_1^2 H^2 + \theta^2 H_1^2 = \eta_1^2 \Theta^2$ ($n^0 \mathbf{I}$), de sorte qu'il reste

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{4} \gamma_1^3;$$

c'est la relation d'Hermite (*Lettre à Liouville*) :

$$\gamma_1^3 = 8 \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\frac{8\nu+3}{4}} \mathrm{F}(8\nu+3).$$

Joignons-y l'équation qui se déduit des expressions de \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' :

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = 2 \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} \mathrm{F}(8\nu+7).$$

Deuxième groupe.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \gamma_1^2 \theta_1 \frac{H^2 H_1}{\Theta^2} = \mathfrak{B} H_1 - 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \gamma_1^2 \theta_1 \frac{\Theta^2 \Theta_1}{H^2} = \frac{1}{4 \sin^2 x} + \mathfrak{B} \Theta_1 - 2 \sum_2 q^{m^2} \beta_{m-1} \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \gamma_1^2 \theta_1 \frac{H_1^2 H}{\Theta_1^2} = \mathfrak{B} H - 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \beta_m \sin(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \gamma_1^2 \theta_1 \frac{\Theta_1^2 \Theta}{H_1^2} = \frac{1}{4 \cos^2 x} + \mathfrak{B} \Theta - 2 \sum_2 q^{m^2} (-1)^m \beta_{m-1} \cos 2mx, \end{array} \right.$$

$$\beta_m = q^{-1} + 2q^{-1} + \dots + mq^{-m^2},$$

$$(6) \quad \mathfrak{B} = \sum_1 q^N \mathrm{F}(4N) = 2 \sum_1 q^N \mathrm{F}(N),$$

en comptant pour $\frac{1}{2}$ toute classe du type $a(x^2 + y^2)$. Changeant q en $-q$, on aurait quatre formules analogues, où figurerait $\mathfrak{B}(-q)$, que

nous désignerons par \mathfrak{w}' :

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}(-q) = 2 \sum_1 (-1)^n q^n F(n).$$

Troisième groupe.

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \theta^2 \theta_1 \frac{\Theta_1^2 H_1}{\Theta^2} &= \ominus H_1 + 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \theta^2 \theta_1 \frac{H_1^2 \Theta_1}{H^2} &= \frac{1}{4 \sin^2 x} - \ominus \Theta_1 - 2 \sum_2 q^{m^2} \beta_{m-1} \cos 2mx, \\ \frac{1}{4} \theta^2 \theta_1 \frac{\Theta^2 H}{\Theta_1^2} &= \ominus H + 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \beta_m \sin(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \theta^2 \theta_1 \frac{H^2 \Theta}{H_1^2} &= \frac{1}{4 \cos^2 x} - \ominus \Theta - 2 \sum_2 q^{m^2} (-1)^m \beta_{m-1} \cos 2mx, \\ \ominus &= \frac{1}{4} + \sum_1 q^n [F(N) - 3F_1(N)] = \sum_0 q^n I(N). \end{aligned} \right.$$

Enfin, les quatre dernières formules se déduiraient des précédentes par changement de q en $-q$.

9. *Remarque.* — En ajoutant membre à membre les premières formules des deuxième et troisième groupes, on trouve la relation

$$\mathfrak{w} + \ominus = \frac{1}{4} \theta_1^3,$$

c'est-à-dire l'équation de *Kronecker* ⁽¹⁾ :

$$\theta_1^3 = 12 \sum_0 q^n [F(N) - F_1(N)],$$

qui donne le théorème classique sur les décompositions d'un entier en sommes de trois carrés, et d'où l'on déduit de suite les formules

(1) *Crelle*, t. 37, p. 248; *Liouville*, 2^e série, t. V, p. 289.

connues :

$$\gamma_1 \theta_1 = 4 \sum_0^{N+1} q^{\frac{N+1}{2}} \Gamma(4N+1), \quad \gamma_1^2 \theta_1 = 4 \sum_0^{N+1} q^{\frac{N+1}{2}} \Gamma(4N+2).$$

Si l'on admet l'équation de Kronecker, les formules du troisième groupe se tirent immédiatement de celles du deuxième.

10. Hermite n'a fait connaître explicitement que la première formule du premier groupe; Kronecker a calculé la valeur de \mathfrak{w} , sans d'ailleurs donner *in extenso* aucune formule du second groupe (*).

11. *Développements fondamentaux.* — En combinant les formules ci-dessus avec celles du n° 4, et en appliquant les relations que fournit la transformation du second ordre, on arrive à de nouvelles formules qui joueront un rôle *fondamental* dans nos recherches.

Partons des deux développements

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \gamma_1^2 \theta \frac{\Pi_1^2 \Pi}{\Theta^2} &= -\mathfrak{w}' H + 2 \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x, \\ \frac{1}{4} \theta_1^2 \theta \frac{\Theta_1^2 \Pi}{\Theta^2} &= \mathfrak{c}' H + 2 \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x, \end{aligned}$$

qui se déduisent d'équations des second et troisième groupes par le changement de q en $-q$; \mathfrak{c}' est $\mathfrak{c}(-q)$, et β'_m est $\beta_m(-q)$.

Il vient, en ajoutant membre à membre,

$$\begin{aligned} \theta \frac{\Pi}{\Theta^2} [\theta_1^2 \Theta_1^2 + \gamma_1^2 \Pi_1^2] \\ = 4(\mathfrak{c}' - \mathfrak{w}') H + 16 \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x. \end{aligned}$$

D'autre part, la première formule du n° 4 s'écrit

$$\begin{aligned} \theta \frac{\Pi}{\Theta^2} 2\theta_1 \gamma_1 \Theta_1 \Pi_1 &= 8 \sum_1^{m+1} (-1)^{m+1} q^{m^2} \\ &\quad \cdot \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx \end{aligned}$$

(*) *Monatsberichte*, 26 mai 1862, p. 307.

et l'on en déduit, par addition, le développement de la fonction

$$\theta \frac{\Pi}{\Theta^2} (\theta, \Theta_1 + \gamma_1 \Pi_1)^2,$$

qui est, en vertu des formules de la transformation d'ordre 2, la fonction

$$\theta \frac{\Pi(x, q)}{\Theta^2(x, q)} \Theta_1^3 \left(\frac{x}{2}, q^2 \right).$$

Changeons maintenant x en $2x$ et q en q^2 , cette fonction devient, en vertu des mêmes formules (*voir* ci-après n° 14),

$$\theta^2(q^2) \frac{\Pi(x, q) \Pi_1(x, q)}{\Theta^2(x, q) \Theta_1^2(x, q)} \Theta_1^3(x, q), \quad \text{ou} \quad \theta \theta_1 \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta^2} \Theta_1^2.$$

12. On a ainsi le développement

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \theta \theta_1 \Pi \Pi_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta^2} \\ &= 4 [\zeta'(q^2) - \theta \theta_1'(q^2)] \Pi(2x, q^2) \\ &+ 8 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} [-2q^{-2} + \dots + (-1)^m 2m q^{-2m^2}] \sin(4m+2)x \\ &+ 8 \sum_1 (-1)^{m+1} q^{2m^2} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{2}} \right] \sin 4mx. \end{aligned} \right.$$

On trouverait de même, ou par la méthode directe des n°s 5-7, la formule analogue

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \theta \theta_1 \Theta \Theta_1 \frac{\Pi^2}{\Pi^2} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} + 4 [\theta \theta_1'(q^2) - \zeta'(q^2)] \Theta(2x, q^2) \\ &- 8 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} [-2q^{-2} + \dots + (-1)^m 2m q^{-2m^2}] \cos 4mx \\ &- 8 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{2}} \right] \cos(4m+2)x. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\mathfrak{A}'(q^2) - \mathfrak{B}'(q^2) = \sum_0 (-1)^N q^{2N} [\mathbf{F}(N) + 3\mathbf{F}_1(N)] = \sum_0 (-1)^N q^{2N} \mathbf{J}(N),$$

$\mathbf{J}(N)$ étant la fonction définie dans l'Introduction.

15. Enfin un procédé semblable donne les formules (10) et (11) :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1, \theta_1, \Pi_1, \Theta_1 \frac{\mathbf{H}^2}{\Theta^2} &= \left[\mathfrak{A}(\sqrt{q}) + e^{\frac{i\pi}{4}} \mathfrak{A}'(\sqrt{q}) \right] \Pi_1(x, \sqrt{q}) \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[3q^{-\frac{9}{8}} + \dots + (4m-1)q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \cos(4m+1)x \\ &- 4 \sum_0 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[q^{-\frac{1}{8}} + \dots + (4m+1)q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}} \right] \cos(4m+3)x. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1, \theta_1, \Pi_1, \Theta_1 \frac{\Theta^2}{\Pi^2} &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} + 2\Pi_1(x, \sqrt{q}) \sum_0 q^{\frac{8N+7}{8}} \mathbf{F}(8N+7) \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[q^{-\frac{1}{8}} + \dots + (4m-3)q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}} \right] \cos(4m+1)x \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[3q^{-\frac{9}{8}} + \dots + (4m-1)q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \cos(4m+3)x. \end{aligned} \right.$$

Les autres développements du même type se déduisent des précédents (nos **12** et **15**) par les changements de x en $x + \frac{\pi}{2}$ et de q en $-q$.

14. Nous réunirons ici, pour y renvoyer au besoin, les principales formules de la *transformation du second ordre*.

$$\begin{aligned} \Theta\Theta_1 &= \theta(q^2)\Theta(2x, q^2), & \Pi\Pi_1 &= \theta(q^2)\Pi(2x, q^2), \\ \Theta_1 + \Theta^2 &= 2\theta_1(q^2)\Theta_1(2x, q^2), & \Pi_1^2 - \Pi^2 &= 2\theta_1(q^2)\Pi_1(2x, q^2); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 4\theta_1 &= \theta^2(q^2), & \gamma_1^2 &= 2\theta_1(q^2)\gamma_1(q^2), & \theta_1^2 + \theta^2 &= 2\theta_1^2(q^2), \\ H\Theta &= \frac{1}{2}\gamma_1(\sqrt{q})H(x, \sqrt{q}), & H_1\Theta_1 &= \frac{1}{2}\gamma_1(\sqrt{q})H_1(x, \sqrt{q}), \\ \Theta_1^2 + H_1^2 &= \theta_1(\sqrt{q})\Theta_1(x, \sqrt{q}), & \Theta^2 + H^2 &= \theta_1(\sqrt{q})\Theta(x, \sqrt{q}), \\ e^{\frac{i\pi}{2}}H\Theta_1 &= \frac{1}{2}\gamma_1(i\sqrt{q})H(x, i\sqrt{q}), & e^{\frac{i\pi}{2}}H_1\Theta &= \frac{1}{2}\gamma_1(i\sqrt{q})H_1(x, i\sqrt{q}). \end{aligned}$$

CHAPITRE II.

FORMULES DES DEUX TYPES DE KRONECKER.

13. Kronecker a donné deux sortes de formules, dans lesquelles, aux premiers membres, figurent des sommes *algébriques* de nombres de classes. Dans les formules du premier type ⁽¹⁾, qui sont au nombre de huit, les seconds membres contiennent des sommes de diviseurs réels; dans celles du deuxième type ⁽²⁾ interviennent des diviseurs complexes $a + bi$, c'est-à-dire des représentations par la forme $x^2 + y^2$. M. Hurwitz ⁽³⁾ a fait connaître des relations analogues, où apparaissent des diviseurs $a + bi\sqrt{2}$, c'est-à-dire des représentations par

$$x^2 + 2y^2.$$

Ce sont des formules nouvelles, se rattachant à ces deux types, que nous allons maintenant établir.

Complément aux formules du premier type.

16. Nous n'avons obtenu qu'une seule formule de ce type.

On a (nos 5 et 14) les développements

$$(12) \quad \gamma_1^2 \theta_1 \frac{HH_1}{\theta^2} = 8 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx,$$

⁽¹⁾ *Crelle*, t. 37, p. 248; *Liouville*, 2^e série, t. V, p. 389.

⁽²⁾ *Monatsberichte*, avril 1875.

⁽³⁾ *Crelle*, t. 99

et

$$(13) \quad \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\eta_1(i\sqrt{q})} \Pi \Theta_1 = \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sin(2m+1)x.$$

Multiplications membre à membre, en observant (n° 14) que

$$\tau_1^2(i\sqrt{q}) = 2\tau_1(-q)\theta_1(-q) = 2\tau_1\theta_1 e^{\frac{i\pi}{4}};$$

le premier membre sera

$$(14) \quad \frac{1}{2} \tau_1(i\sqrt{q}) \tau_1\theta_1 \Pi_1 \Theta_1 \frac{\Pi^2}{\Theta^2} e^{-\frac{i\pi}{8}},$$

c'est-à-dire, au facteur $\frac{1}{2} \tau_1(i\sqrt{q}) e^{-\frac{i\pi}{8}}$ près, le premier membre de (10).

Done, dans (14), en vertu de (10), le terme en $\cos x$ est

$$(15) \quad 2e^{-\frac{i\pi}{8}} \tau_1(i\sqrt{q}) q^{\frac{1}{8}} \sum_0 q^{\frac{8\gamma+7}{8}} F(8\gamma+7).$$

Ce terme est dès lors égal au terme en $\cos x$ obtenu par le produit des seconds membres de (12) et (13), et qu'on calcule immédiatement par la formule $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$; on trouve ainsi l'expression

$$(16) \quad 4 \sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \left[q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} + q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \right].$$

L'égalité des quantités (15) et (16) conduit à la formule que nous avons en vue.

En effet, dans (15), cherchons le coefficient de $q^{\lambda+\frac{1}{8}}$, λ étant nécessairement entier et positif. Il faut, à cet effet, poser

$$8\lambda+1 = 8\gamma+7 + (2x+1)^2 + 1 \quad (x \geq 0)$$

et le coefficient cherché est

$$2 \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^{\frac{x(x+1)}{2}} F[8\lambda - (2x+1)^2].$$

Pour avoir le coefficient de $q^{\frac{N+1}{2}}$ dans (16), il faut poser

$$(17) \quad \begin{cases} 8N+1 = 8m + (2m+1)^2 + 16m\varphi, \\ \text{c'est-à-dire} \\ 2N = m(m+4\varphi+3), \quad (m, \varphi \geq 0) \end{cases}$$

et

$$(18) \quad \begin{cases} (8N+1) = 8m' + (2m'-1)^2 + 16m'\varphi', \\ \text{c'est-à-dire} \\ 2N = m'(m'+4\varphi'+1); \quad (m', \varphi' \geq 0) \end{cases}$$

et le coefficient cherché est

$$4 \sum m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2} + \varphi} + 4 \sum m' (-1)^{\frac{(m'-1)(m'-2)}{2} + \varphi'}.$$

On reconnaît sans difficulté, à l'aide de (17) et de (18), que cette expression est égale à la somme

$$-4 \sum \hat{\varphi} (-1)^{\frac{(\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)^2 - 1}{8}}$$

étendue aux décompositions $2N = \hat{\varphi} \hat{\varphi}_1$, où $\hat{\varphi} < \hat{\varphi}_1$; $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}_1$ étant positifs et de parités différentes. De là, la formule finale

$$(19) \quad \sum_{x \geq 0} \left(\frac{3}{2x+1} \right) F[8N - (2x+1)^2] = - \sum \hat{\varphi} \left(\frac{2}{\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}} \right),$$

où l'on a introduit le symbole, $\left(\frac{3}{a} \right)$, de Jacobi; la somme, au premier membre, porte sur les valeurs positives entières de x , à partir de 0, telles que $8N - (2x+1)^2$ ne soit pas négatif; la somme, au second membre, s'étend à toutes les décompositions en facteurs $2N = \hat{\varphi} \hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}_1$ n'étant pas de même parité, et $\hat{\varphi}$ étant inférieur à $\hat{\varphi}_1$.

17. Remarques. — 1^{re} La formule (19) ne paraît pas rentrer dans les formules classiques I-VIII du premier type de Kronecker.

2^o Si l'on partait des développements (n^{os} 5 et 14) de $H(\theta_1; \theta^2)$ et de $H_1(\theta_1)$, en utilisant alors l'équation (8), au lieu de l'équation (10),

on obtiendrait de même une relation où figure la fonction J , et qui coïncide, aux notations près, avec la formule VIII de Kronecker.

Notre formule (19) se présente donc comme l'analogue de celle-ci.

Nouvelles formules du second type.

18. Les développements en série qui vont nous servir sont ceux de fonctions telles que $H'H_1; \Theta$.

Partons de la formule d'Hermite (1)

$$\frac{1}{4} \gamma_1 \frac{III_1}{\Theta} = \sum q^{m^2} \left(q^{-\frac{1}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right) \sin 2mx;$$

et dérivons les deux membres par rapport à x .

Au premier membre, en tenant compte des relations différentielles du n° 2, on trouve

$$\frac{1}{4} \gamma_1 \frac{\eta_1}{\Theta^2} (H'H_1 \Theta - \theta_1^2 \Theta_1 H^2),$$

d'où l'on tire, en utilisant la première formule (3), la relation

$$(20) \quad \frac{1}{4} \gamma_1 \frac{II' H_1}{\Theta} = \mathfrak{A} \Theta_1 + \sum_1^{\infty} q^m \left[(2m-1) q^{-\frac{1}{4}} + (2m-3) q^{-\frac{9}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos 2mx.$$

On trouverait de même

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \gamma_1 \frac{\Theta' \Theta}{II} &= e^{\frac{i\pi}{4}} \mathfrak{A}' H_1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ &\quad \times \left[m q^{-\frac{1}{4}} + (m-1) q^{-\frac{9}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos(2m+1)x, \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \theta_1 \frac{II \Theta_1}{\Theta} &= \mathfrak{B} H_1 + \frac{1}{2} q^{\frac{1}{4}} \cos x + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ &\quad \times \left[2m+1 + 2(2m-1) q^{-1} + 2(2m-3) q^{-3} + \dots + 2q^{-m} \right] \cos(2m+1)x, \end{aligned} \right.$$

(1) *Comptes rendus*, t. LX, p. 111; *Œuvres*, t. II, p. 341.

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \theta_1 \frac{\theta' H_1}{H_1} &= 16 \theta_1 + q \cos 2x + 2 \sum_1 q^{m+1/2} \\ &\times \left[\frac{m+1}{2} + mq^{-1} + (m-1)q^{-3} + \dots + q^{-m} \right] \cos(2m+2)x. \end{aligned} \right.$$

19. Cela posé, faisons $x = \frac{\pi}{4}$ dans les formules (20) à (23). On trouve directement, et en utilisant ensuite les formules du n° 14,

$$(24) \quad \theta_1 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \Theta \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} = \theta(q^4) = \sqrt{\theta(q^2)\theta_1(q^2)},$$

$$(25) \quad H_1 \left(\frac{\pi}{4} \right) = H \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\pi}{8}} \eta_1(qi) = \sqrt{\theta(q^2)\eta_1(q^2)}.$$

Dès lors, la substitution $x = \frac{\pi}{4}$ faite dans (21), par exemple, donne, au premier membre,

$$\frac{1}{4} \eta_1 \theta_1 \left(\frac{\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{\theta_1(q^2)}}{\sqrt{\eta_1(q^2)}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{4} \theta_1 \left(\frac{\pi}{4} \right) \sqrt{2} \theta_1(q^2).$$

On a ainsi, en remplaçant $\theta_1 \left(\frac{\pi}{4} \right)$ par son développement, la relation :

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{\infty} q^{2n+1/2} (2n+1) (-1)^n \times \sum_{-\infty}^{\infty} q^{2m^2} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \times \sum_0^{\infty} q^{\frac{1}{4}n+3} (-1)^n \Gamma(1/2+3) \\ &\quad - 2 \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left[mq^{-\frac{1}{4}} + (m-1)q^{-\frac{9}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Égalons les coefficients de q^N dans les deux membres de (26) :

1° N pair. Il n'y a pas de terme en q^N au premier membre; au second membre, si l'on pose $N = 2N'$, ce terme a pour coefficient, comme le donne un calcul facile,

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma[8N' - (2m+1)^2] (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} - 2 \sum_1^{\infty} \delta(-1)^{\frac{(2m-1)^2}{4} + 3},$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions en facteurs $2N = 2\delta_1$, où δ_1 et δ sont de parités contraires, et $\delta_1 > \delta$. On retrouve ainsi la formule (19).

2° N impair; $N = 2N' + 1$. — En ce cas, il n'y a pas de terme en q^8 dans la somme \sum_i qui figure au second membre de (26).

Au premier membre, pour avoir le terme en q^8 , posons

$$2N' + 1 = (2n + 1)^2 + 2m^2, \quad (m, n \neq 0);$$

le coefficient cherché sera $\sum (-1)^n (2n + 1)$. De là, la formule nouvelle, à placer à côté de (19),

$$(27) \quad \sum_{m \geq 0} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[8N' + 1 - (2m + 1)^2] = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} a,$$

la somme, au second membre, portant sur les décompositions

$$2N' + 1 = a^2 + 2b^2 \quad (a > 0, b \geq 0).$$

20. En opérant de même sur le développement (20), on obtiendrait la formule VII de Kronecker, et un cas particulier d'une formule due à M. Hurwitz ⁽¹⁾.

21. Le développement (22) conduit à une seule formule, qui est nouvelle,

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{m \geq 0} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[4N + 1 - (2m + 1)^2] \\ & = \sum \left(\frac{-2}{a} \right) a - 2 \sum d \left(\frac{2}{\frac{d+d_1}{2}} \right). \end{aligned} \right.$$

Au second membre, la première somme porte sur les décompositions

$$4N + 1 = a^2 + 4b^2, \quad (a > 0, b \geq 0);$$

(1) *Crelle*, t. 99.

la seconde sur les décompositions en facteurs $4N+1 = d_1 d_2$, avec $d_1 \equiv d_2 \pmod{4}$. Toutefois, si $4N+1$ est un carré parfait ϑ^2 , le terme $2\vartheta\left(\frac{\vartheta}{\vartheta}\right)$ devra être divisé par $2^{(1)}$, c'est-à-dire être remplacé par $-\vartheta\left(\frac{\vartheta}{\vartheta}\right)$.

22. Le développement (23) ne donne que des résultats connus.

25. Une autre méthode, pour obtenir des relations du second type de Kronecker, consiste à poser $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans les équations (20) à (23).

Si dans la relation $\Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) = e^{-ix} q^{-\frac{1}{4}} \Pi_1(x)$, on fait $x = -\frac{\pi\tau}{4}$, on trouve

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \Pi_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right);$$

et, de même,

$$\Pi\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = i\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right).$$

Si l'on remplace x par $\frac{\pi\tau}{4}$ dans les relations quadratiques entre les quatre fonctions thêta, on trouve aisément

$$\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right); \Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \theta(q^{\frac{1}{4}}); \theta(q).$$

Enfin, on a directement

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{\frac{2m\pi\tau}{4}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2 + \frac{m}{2}} = q^{\frac{1}{16}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{16}},$$

d'où

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{16}} \eta_1\left(q^{\frac{1}{4}}\right).$$

Ces formules donnent les valeurs des quatre fonctions thêta pour $x = \frac{\pi\tau}{4}$.

(1) Cela provient de ce que, dans le crochet qui figure au second membre de (22), le premier terme est $2m+1$ et non $2(2m+1)$ comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

24. Faisons $x = \frac{\pi z}{4}$ dans l'équation, déduite de (20) par le changement de q en $-q$,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \eta_1 \frac{11H_1}{\Theta_1} \\
 & = e^{\frac{i\pi}{4}} \eta' \Theta + \sum_1 (-1)^m q^{m^2} \left[(2m-1) q^{-\frac{1}{4}} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + (2m-2\mu+1) q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos 2m\pi.
 \end{aligned}$$

Il vient, au premier membre,

$$\frac{1}{4} \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \times \sum_{-\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{2n+1}{4}} (-1)^n (2n+1),$$

et au second

$$\begin{aligned}
 & \sum_0 q^{\nu + \frac{3}{4}} (-1)^\nu \Gamma(\nu+3) \times \sum_{-\infty} q^{m^2 + \frac{m}{2}} (-1)^m \\
 & - \sum_1 (-1)^m q^{m^2} q^{\frac{m}{2} + \frac{m}{2}} \left[(2m-1) q^{-\frac{1}{4}} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + (2m-2\mu+1) q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right].
 \end{aligned}$$

Égalons, dans les deux membres, les coefficients de $q^{\frac{2N+1}{4}}$, en distinguant les cas de $N = 2M$ et $N = 2M+1$.

Si $N = 2M$, le coefficient cherché est, au premier membre, la somme

$$(29) \quad \frac{1}{4} \sum (2n+1) (-1)^n,$$

étendue aux décompositions $16M+5 = (4n+3)^2 + 4(2m+1)^2$, avec $m, n \geq 0$. Cette formule exige que n soit impair, donc $(-1)^n = -1$.

Au second membre, le coefficient de $q^{\frac{2M+1}{4}}$ se compose des trois

sommes

$$(30) \quad \left(\sum_{m' \equiv 0} F \left(\frac{16M + 5 - (8m' + 5)^2}{4} \right) (-1)^{M-m'-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum (\delta - 1) + \frac{1}{4} \sum (\delta' + 1), \right.$$

δ désignant tout diviseur de $16M + 5$ inférieur à son conjugué ⁽¹⁾ et du type $4h + 3$; δ' tout diviseur de $16M + 5$ inférieur à son conjugué et du type $4h + 1$.

L'égalité des expressions (29) et (30) donne la formule cherchée; on la simplifie en observant que

$$\frac{1}{4} \sum (\delta - 1) + \frac{1}{4} \sum (\delta' + 1) = \frac{1}{4} \sum (\delta + \delta') + \frac{1}{4} A,$$

A étant la différence entre le nombre des décompositions

$$16M + 5 = \delta \delta_1 \quad \text{ou} \quad \delta' \equiv \delta'_1 \equiv 1 \pmod{4},$$

et celui des décompositions

$$16M + 5 = \delta \delta_1 \quad \text{ou} \quad \delta \equiv \delta_1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Sous une autre forme, par un résultat classique, A est le *quart* du nombre des décompositions

$$(31) \quad 16M + 5 = a^2 + b^2,$$

$a, b > 0$, a impair, b pair (b est nécessairement impairement pair).

D'ailleurs a ou $-a$, soit εa , est du type $4n + 3$; et la décomposition considérée ci-dessus

$$16M + 5 = (4n + 3)^2 + 4(2m + 1)^2$$

donne

$$\varepsilon a = 4n + 3, \quad \text{d'où} \quad 2n + 1 = \frac{1}{2}(\varepsilon a - 1).$$

(1) Si $A = \delta \delta_1$, les diviseurs δ et δ_1 sont dits *conjugués*.

Dès lors, la somme (29) s'écrit

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (2n+1) = -\frac{1}{8} \sum_{\alpha} \varepsilon \alpha + \frac{1}{8} B,$$

B étant le nombre des $\varepsilon \alpha$, c'est-à-dire la *moitié* du nombre des décompositions (31), nombre qui est $\frac{1}{4} A$, de sorte que $\frac{1}{8} B$ est $\frac{1}{8} A$.

Ainsi le terme $\frac{1}{4} A$ figure à la fois dans (29) et (30) et se détruit; il reste alors, si l'on observe que $F(4\Omega) = 2F(\Omega)$, la formule

$$2(-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m F[16M+5-(8m+5)^2] = \sum d + \frac{1}{2} \sum a,$$

d désignant tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué, et $\sum a$ s'étendant aux décompositions $16M+5 = a^2 + b^2$, où $a, b \not\equiv 0$, b pair, a impair et $\equiv 3 \pmod{4}$.

25. On aurait une formule analogue en supposant $N = 2M+1$; les deux formules se réunissent en une seule :

$$\begin{aligned} 2(-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m F[16M+8h+5-(8m+4h+5)^2] \\ = \sum d - \sum \left(\frac{-1}{a} \right) a. \end{aligned}$$

Dans cette formule, h est soit 0, soit 1, à volonté; d désigne tout diviseur de $16M+8h+5$, inférieur à son conjugué; la dernière somme, enfin, s'étend aux décompositions

$$16M+8h+5 = a^2 + b^2,$$

avec $a, b > 0$, a impair, b pair.

26. En faisant $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans la relation qu'on déduit de (22) par

changement de q en $-q$, on obtient la double formule

$$\begin{aligned} 2(-1)^m \sum_{m \leq 0} (-1)^m F[16M + 8h + 1 - (8m + 4h + 1)^2] \\ = - \sum d \left(\frac{2}{d} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{-1}{a} \right) a, \end{aligned}$$

h est à volonté 0 ou 1; d désigne tout diviseur de $16M + 8h + 1$, inférieur ou égal à son conjugué; la dernière somme enfin s'étend aux décompositions

$$16M + 8h + 1 = a^2 + 2b^2,$$

avec $a > 0$, $b \geq 0$.

Toutefois, si $16M + 8h + 1$ est un carré δ^2 , on divise par 2, au second membre, le terme $-\delta \left(\frac{2}{\delta} \right)$.

27. Nous n'insisterons pas davantage sur les formules qu'on obtiendrait par ce procédé, préférant aborder des relations d'un caractère plus nouveau.

CHAPITRE III.

FORMULES DES DEUX TYPES DE LIOUVILLE.

28. Liouville a indiqué une intéressante formule ⁽¹⁾ où le premier membre est

$$\sum (-1)^m (2m + 1) F[8N + 4 - (2m + 1)^2],$$

et où le second membre dépend des décompositions de $8N + 4$ en deux carrés. Stieltjes a donné ⁽²⁾ la démonstration de la formule de Liou-

⁽¹⁾ *Liouville*, 2^e série, t. XIV, p. 1.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 10 décembre 1881; *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 66.

ville et en a établi d'analogues ⁽¹⁾, où figurent, sous le signe F, des expressions telles que $\Lambda = 2(2m+1)^2$, ou $\Lambda = 3(2m+1)^2$.

Dans l'ordre d'idées de Liouville, j'ai obtenu les résultats qui suivent.

29. Formules nouvelles du premier type de Liouville. — Dans la formule (22), changeons x en $x + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\theta_1 \frac{H_1 \Theta}{\Theta_1} = -4\pi H - 2 \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \times [2m+1 + \dots + 2(2m+1-2\mu)q^{-\mu^2} + \dots + 2q^{-m^2}] \sin(2m+1)x.$$

Égalons les valeurs principales des deux membres pour $x=0$. On a $\eta_1'' \theta = -4\pi \eta_1' - 2 \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m (2m+1) [2m+1 + \dots + 2q^{-m^2}]$; remplaçons η_1'' et η_1' par leurs valeurs (nos 2 et 1), et écrivons que les coefficients de $q^{\frac{N+1}{4}}$ sont les mêmes dans les deux membres, nous obtenons la relation nouvelle :

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{m=0} (-1)^m (2m+1) F[4N+1 - (2m+1)^2] \right. \\ & \quad \left. = - \sum d(d_1+d) (-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} + (-1)^N \sum a^2. \right. \end{aligned}$$

La première somme, au second membre, s'étend aux décompositions $4N+1 = d_1 d$, où $d_1 \equiv d$; la deuxième aux décompositions

$$(32) \quad 4N+1 = a^2 + 4b^2, \quad (a > 0, b \geq 0).$$

On peut simplifier la formule, en observant que

$$(-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} = (-1)^{N+\frac{d-1}{2}};$$

(1) *Comptes rendus*, 17 décembre 1883.

on a alors au second membre le terme $-\sum dd_1(-1)^{N-\frac{d-1}{2}}$, c'est-à-dire

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

et, comme le dernier \sum est la moitié du nombre des décompositions (32), il est évident que

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} = -\frac{1}{2}(-1)^N \sum (a^2 + 4b^2).$$

Notre formule prend ainsi la forme définitive :

$$\begin{aligned} & 8(-1)^N \sum_{m=0} (-1)^m (2m+1) F\left[\frac{1}{4}N+1-(2m+1)^2\right] \\ &= -2 \sum \left(\frac{-1}{d}\right) d^2 + \sum (a^2 + 4b^2), \end{aligned}$$

la signification des sommes, au second membre, ayant été indiquée plus haut.

Toutefois, si $\frac{1}{4}N+1$ est un carré δ^2 , on divisera par 2 le terme $-2\left(\frac{-1}{\delta}\right)\delta^2$ du second membre.

50. Remarque. — En changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$ dans (21), et égalant les valeurs principales des deux membres pour $x=0$, on trouverait la formule même de Liouville.

51. Suite des formules du premier type de Liouville. — On a

$$\gamma_1 \frac{\Theta' \Pi_1 \Pi}{\Theta^2} = \gamma_1 \frac{\Pi_1}{\Theta^2} (\Pi' \Theta - \theta^2 \Theta_1 \Pi_1) = \gamma_1 \frac{\Pi' \Pi_1}{\Theta} - \gamma_1 \theta^2 \frac{\Pi_1^2 \Theta_1}{\Theta^2},$$

et, par (20), (4) et les expressions de λ et $-\lambda' e^{\frac{i\pi}{2}}$ (n° 8),

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{\Theta' \Pi \Pi_1}{\Theta^2} &= 8\theta_1 \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} F(8\nu+7) + 8 \sum_1 q^{m^2} \\ &\times \left[(m-1)q^{-1} + \dots + (m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \dots + (-m+1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos 2mx. \end{aligned}$$

D'autre part $[n^o 5, (1)]$,

$$\tau_1^2 \theta_1 \theta \frac{1111_1}{\Theta^2} = 8 \sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx$$

et l'on a

$$\Theta' = i \sum_0 mq^{m^2} (-1)^{m+1} \sin 2mx.$$

Effectuons le produit membre à membre de ces deux dernières relations: le terme indépendant de x , au premier membre, sera, par la formule du bas de la page précédente,

$$(33) \quad 8\tau_1 \theta_1 \theta \sum_0 q^{\frac{8\gamma+7}{4}} F(8\gamma+7);$$

au second membre, ce sera

$$(34) \quad 16 \sum_0 m^2 \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}} (-1)^{m+1}.$$

Remplaçons $\tau_1 \theta_1 \theta$ par τ_1' , et égalons les coefficients de q^{2N} dans (33) et (34), nous arrivons immédiatement à la formule :

$$(35) \quad \sum_{m=0} (-1)^m (2m+1) F[8N - (2m+1)^2] = \sum \delta^2 (-1)^{\frac{\delta_1+\delta_2+1}{2}}.$$

La somme, au second membre, s'étend aux décompositions, déjà rencontrées au n^o 16, $2N = \delta^2 \delta_1$, où $\delta < \delta_1$ et δ, δ_1 de parités différentes.

52. On trouve de même, en utilisant (22) et la première relation (7), le développement

$$\theta_1 \Theta' \frac{11\Theta_1}{\Theta^2} = i(\vartheta_1 - \vartheta) \Pi_1 + 2q^{\frac{1}{2}} \cos x + 2 \sum_1 q^{\frac{2m+1}{2}} \omega_m \cos(2m+1)x,$$

où l'on a posé,

$$\omega_m = 2m+1 + \dots + (4m-8\mu+2)q^{-\mu} + \dots + (-4m+2)q^{-m}.$$

Maintenant, si l'on multiplie membre à membre les développements (n° 5) de $\theta_1^2 \gamma_1 \theta_1 \theta_1 : \theta^2$ et de θ' , et si l'on égale dans les deux membres nouveaux les termes en $\cos x$, on arrive à la *formule simple*

$$(36) \quad 2(-1)^d \sum_{m \geq 0} (-1)^m (2m+1) J \left(\frac{4N+1-(2m+1)^2}{4} \right) = - \sum \left(\frac{-1}{d} \right) d^2,$$

d désignant tout diviseur de $4N+1$ inférieur ou égal à son conjugué. Toutefois, si $4N+1 = 2^2$, le terme du second membre qui correspond à 2 devra être divisé par 2.

Les formules (35) et (36) sont remarquables en ce sens qu'il ne figure, dans les seconds membres, que des diviseurs réels.

53. Second type de Liouville. — Liouville, toujours sans démonstration, a fait connaître une formule ⁽¹⁾ où le premier membre est

$$\sum (2m+1)^2 F[4N-(2m+1)^2],$$

le second membre s'exprimant à l'aide des diviseurs de N . Nous retrouverons cette formule plus bas; nous en établirons d'abord d'autres, plus élégantes, qui donnent d'une manière générale les sommes

$$\sum m^2 F(N-m^2) \quad \text{et} \quad \sum m^2 F_1(N-m^2).$$

54. Formules du second type. — Partons de la relation qu'on déduit de (9), (n° 12), en changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$, à savoir :

$$\begin{aligned} \theta_0, \frac{H^2}{H_1^2} \theta \theta_1 &= \frac{1}{\cos^2 x} + \theta(2x, q^2) \sum_0 (-1)^v q^{2v} J(v) \\ &- 8 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} [-2q^{-2} + \dots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}] \cos 4mx, \\ &+ 8 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[q^{\frac{1}{2}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{2m-1}{2}} \right] \cos (4m+2)x. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, 2^e série, t. VII, p. 99.

Journal de Math. (6^e série), tome III. — Fasc. IV. 1907.

et égaux les coefficients des termes en x^2 dans les deux membres.

Au premier membre, le coefficient de x^2 est

$$\theta\theta_1 \frac{\eta_1^2 \theta_1^2 \theta^2}{\eta_1^4} \theta\theta_1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta^4 \theta_1^4, \quad \text{ou} \quad \theta^8(q^2),$$

et l'on a évidemment

$$(37) \quad \theta^8(q^2) = 1 + \sum_1 q^{2N} (-1)^N \varphi(N),$$

$\varphi(N)$ étant le nombre de décompositions de N en somme de huit carrés (à racines positives, négatives ou nulles, et l'ordre des carrés entrant en compte).

Il est bien connu d'ailleurs que

$$\varphi(2M+1) = 16 \sum \delta^3, \quad \varphi(2M) = 16 \left[\sum \delta_p^3 - \sum \delta_i^3 \right],$$

δ désignant tout diviseur de $2M+1$; δ_p (et δ_i) tout diviseur pair (et impair) de $2M$.

Au second membre, le coefficient de x^2 est

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + 4 \sum_0 (-1)^y q^{2y} J(y) \times \sum_0 -16m^2 q^{2m^2} (-1)^m \\ & + 16 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} 4m^2 [-2q^{-2} + \dots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}] \\ & - 16 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{2m+1^2}{2}} (2m+1)^2 \left[q^{-\frac{1}{2}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Égalons maintenant les coefficients de q^{2N} ($N \geq 0$) dans les expressions (37) et (38).

Dans (37), c'est $(-1)^N \varphi(N)$; dans la première ligne de (38), c'est

$$-64(-1)^N \sum_0 m^2 J(N-m^2);$$

enfin, dans les deux dernières lignes de (38), on voit aisément que

c'est

$$16 \sum (-1)^d (d_1 - d)(d_1 + d)^2,$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = dd_1$, $d \leq d_1$.

53. Formules finales. — Distinguons maintenant deux cas :

1° N impair. — On aura, en tenant compte de $dd_1 = N$,

$$(39) \quad 4 \sum_0 m^2 A(N - m^2) = N \sum (d_1 - d) - 2 \sum d^3, \quad (N = d_1 d; \quad d \leq d_1).$$

Toutefois, si N est un carré, δ_0^2 , il faut diviser par 2 le terme $-2\delta_0^3$ du second membre.

On peut obtenir, par voie élémentaire, une formule analogue à (39).

Partons de la relation de Kronecker, (n° 9),

$$\theta_1^3 = 12 \sum_0 q^n [F(\nu) - F_1(\nu)];$$

multiplions les deux membres par $\sum_{-\infty}^{+\infty} m^2 q^{m^2}$ et égalons les coefficients de q^N dans les deux membres nouveaux.

Au premier membre, ce coefficient est $\sum m^2$ étendu à toutes les décompositions $N = x^2 + y^2 + z^2 + m^2$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} \sum (x^2 + y^2 + z^2 + m^2) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} N \varphi_4(N),$$

$\varphi_4(N)$ étant le nombre des décompositions de N en quatre carrés, ici $8 \sum \delta$, puisque N est impair. On a dès lors

$$\begin{aligned} & 6 \sum_{\substack{m > 0 \\ m^2 < N}} m^2 [F(N - m^2) - F_1(N - m^2)] \\ &= 12 \sum_{\substack{m > 0 \\ m^2 < N}} m^2 [F(N - m^2) - F_1(N - m^2)] = N \sum \delta, \end{aligned}$$

δ désignant tout diviseur de N .

En combinant cette relation avec (39) de manière à faire disparaître successivement les termes en F_1 et en F , on trouve les deux formules simples

$$(40) \quad 8 \sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = N \sum d_1 - \sum d^3 \quad (N \text{ impair}).$$

$$(41) \quad 8 \sum_{m>0} m^2 F_1(N-m^2) = \frac{1}{3} N \sum (d_1 - 2d) - \sum d^3$$

Aux seconds membres, les sommes s'étendent aux décompositions $N = dd_1$, avec $d \leq d_1$; on a de plus, comme d'ordinaire, $F(0) = 0$, $12 F_1(0) = -1$. Si N est un carré, δ_0^2 , les termes qui proviennent de la décomposition $N = \delta_0 \cdot \delta_0$ doivent tous être divisés par 2 dans les seconds membres ⁽¹⁾.

2° N pair. — La même série de calculs conduit aux résultats suivants.

Désignons par d_p tout diviseur pair, par d_i tout diviseur impair de N ; soit $N = dd_1$ une décomposition quelconque de N en deux facteurs avec $d \leq d_1$, posons

$$U(N) = \sum (-1)^{d_i} (d_1 - d),$$

$$U_3(N) = \sum (-1)^{d_i} (d_1^3 - d^3);$$

on a, N étant pair quelconque,

$$(42) \quad \begin{cases} 16 \sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) \\ = 3N \sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + NU(N) + U_3(N), \end{cases}$$

(1) On peut dire aussi que, dans (40), et quel que soit N impair, la somme au second membre porte sur les décompositions $N = dd_1$, avec $d < d_1$. L'observation ne s'applique pas à (41).

La formule (40) s'écrit aussi, quel que soit N impair,

$$8 \sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = \sum_{d \mid N} d(d_1^2 - d^2).$$

$$(43) \quad \begin{cases} 16 \sum_{m \geq 0} m^2 F_1(N - m^2) \\ = -N \sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + N U(N) + U_3(N). \end{cases}$$

Pour N carré parfait, il n'y a pas de modification; on suppose toujours $F(0) = 0$, $12F_1(0) = -1$.

56. Formule de Liouville ⁽¹⁾. — Nous la trouverons en égalant les coefficients de x^2 dans les deux membres de (10), puis ceux de q^N dans les deux membres de la relation obtenue. Il vient ainsi

$$\sum_{m \geq 0} (2m+1)^2 F[8N - (2m+1)^2] = -8 \sum d^3 + \sum (\delta_p - \delta_i)(\delta_p + \delta_i)^2,$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta_p \delta_i$, avec $\delta_i < \delta_p$, δ_i impair, δ_p pair. On peut écrire aussi

$$(44) \quad \begin{cases} \sum_{m \geq 0} (2m+1)^2 F[8N - (2m+1)^2] \\ = -8 \sum d^3 + 2N \sum (\delta_p - \delta_i) + \sum (\delta_p^3 - \delta_i^3), \end{cases}$$

les d' et δ ayant la signification qui vient d'être indiquée.

57. Remarques. — 1° Si l'on multiplie par $\sum_{m \geq 0} (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}$ les deux membres de la relation d'Hermite (n° 8, p. 350), et si l'on égale les coefficients de q^{2N+1} dans les deux nouveaux membres, on arrive à la formule

$$(45) \quad \sum_{m \geq 0} (2m+1)^2 F[8N+4 - (2m+1)^2] = (2N+1) \sum d,$$

d étant un diviseur quelconque de $2N+1$.

(1) *Journal de Liouville*, 2^e série, t. VII, p. 99.

2° Les formules (44) et (45) sont implicitement contenues dans (42).

3° La formule donnée par Liouville, sans aucune indication de démonstration, comprend en réalité les deux relations (44) et (45).

58. Dernière formule du second type. — Reprenons la relation du n° 52 :

$$\theta_1 \theta \frac{H\theta_1}{\theta^2} = 4(\mathfrak{w} - \varepsilon) \Pi_1 + 2q^{\frac{1}{2}} \cos x + 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m \cos(2m+1)x,$$

et égalons les coefficients de x^2 dans les deux membres. Au premier membre, on a $\theta_1^2 \theta'' \eta' : \theta^2$; c'est-à-dire, en remplaçant η' par $\eta_1 \theta_1 \theta$ et $\eta_1 \theta''$ par $\theta \eta_1'' + \theta \eta_1 \theta_1'$ (n° 2),

$$\theta_1^3 (\eta_1'' + \eta_1 \theta_1') \quad \text{ou} \quad 4\eta_1'' (\mathfrak{w} + \varepsilon) + \eta_1 \theta_1^7.$$

Il vient ainsi

$$\eta_1 \theta_1^7 = 2\eta_1'' (-\mathfrak{w} - 3\varepsilon) - q^{\frac{1}{2}} - \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m.$$

Or, égalons de même les coefficients de x^2 dans les deux membres de la première relation (5), nous trouvons

$$\eta_1^5 \theta_1^3 = 2\eta_1'' \mathfrak{w} + 4 \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m;$$

d'où, par combinaison avec la relation précédente,

$$(46) \quad \eta_1 \theta_1^7 + 7\eta_1^5 \theta_1^3 = 6\eta_1'' (2\mathfrak{w} - \varepsilon) - q^{\frac{1}{2}} + \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (28\beta_m - \omega_m).$$

Maintenant, égalons, dans les deux membres de (46), les coefficients de $q^{\frac{N+1}{2}}$. Si l'on désigne par $C_{4,7}$ et $C_{5,3}$ les nombres des décompositions de $4N+1$ en un carré impair *suivi* de sept carrés pairs, et en cinq carrés impairs *suivis* de trois pairs, le coefficient cherché, au premier membre, est

$$C_{4,7} + 7C_{5,3}.$$

Or, si C est le nombre total des décompositions de $4N+1$ en huit carrés, écrits dans un ordre quelconque, on a évidemment

$$C = 8C_{1,1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_{3,3} = 8(C_{1,1} + 7C_{3,3}).$$

Donc, le coefficient cherché au premier membre est le huitième de C , c'est-à-dire deux fois la somme des cubes des diviseurs de $4N+1$.

Si, maintenant, on observe que

$$2\mathfrak{W} - \mathfrak{C} = \sum q^y [4F(y) - F(y) + 3F_1(y)] = 3 \sum q^y G(y),$$

en désignant toujours par $G(y)$, avec Kronecker, le nombre total,

$$F(y) + F_1(y),$$

des classes de discriminant y (ordre propre et ordre impropre réunis), on achève le calcul sans difficulté, et l'on arrive à la formule :

$$24 \sum_{m \geq 0} (2m+1)^2 G\left(\frac{4N+1-(2m+1)^2}{4}\right) = \sum d(d_1+d)(d_1-3d);$$

la somme, au second membre, s'étend aux décompositions

$$4N+1 = dd_1, \quad d \leq d_1.$$

Toutefois, si $4N+1$ est carré, le terme qui provient de la décomposition $4N+1 = \delta \cdot \delta$ doit être divisé par 2.

On peut observer que $G\left(\frac{\omega}{4}\right) = F\left(\frac{\omega}{4}\right) + F_1\left(\frac{\omega}{4}\right) = F_1(\omega)$, ce qui permet de n'introduire que F_1 dans la dernière formule.

59. Remarque. En opérant sur la formule du n° 51, comme l'on vient d'opérer sur celle analogue du n° 52, on trouverait un résultat plus compliqué qu'il est inutile d'indiquer ici.

CHAPITRE IV.

FORMULES OÙ INTERVIENT LA CLASSE $x^2 - 2y^2$

40. Partons de la première formule (2), (n° 4),

$$\frac{1}{2} \theta_1 \theta_1 \theta_1 \theta_1 \frac{H_1 \theta_1 H}{\theta^2} = 2 \sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx$$

et de

$$H = 2 \sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons les coefficients des termes en $\cos x$ dans les deux nouveaux membres.

Au premier, en vertu de la formule fondamentale (10), ce coefficient est

$$(47) \quad 2\theta q^{\frac{1}{8}} \sum_0 q^{\frac{8y+7}{8}} \Gamma(8y+7);$$

au second, par la formule $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, et par la multiplication directe, on obtient, pour le coefficient analogue,

$$(48) \quad 2 \sum_1 \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] q^{m^2} \left(q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} - q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \right).$$

Égalons maintenant les coefficients de q^N dans (47) et (48). Dans (47), on trouve de suite :

$$2 \sum_{m \geq 0} (-1)^m \Gamma(8N+1-8m^2);$$

dans (48), il faut poser successivement

$$(49) \quad \begin{cases} 4N = 4m^2 + (2m-1)^2 - (2\mu-1)^2 & (m, \mu \geq 1, \mu \leq m), \\ 4N = 4m'^2 + (2m'+1)^2 - (2\mu'-1)^2 & (m', \mu' \geq 1, \mu' \leq m') \end{cases}$$

et le coefficient cherché sera

$$(50) \quad 2 \sum (-1)^{k+1} (2\mu - 1) + 2 \sum (-1)^{k'} (2\mu' - 1).$$

Les équations (49) s'écrivent

$$(51) \quad \begin{cases} 8N - 1 = (4m - 1)^2 - 2(2\mu - 1)^2, \\ 8N - 1 = (4m' + 1)^2 - 2(2\mu' - 1)^2, \end{cases}$$

ce qui fait apparaître la forme $x^2 - 2y^2$. Observons maintenant que, si l'on pose $8N - 1 = x^2 - 2y^2$, x et y sont nécessairement impairs; dès lors, les relations (51), jointes aux *inégalités* (49), se résument en

$$8N - 1 = x^2 - 2y^2, \quad x, y \geq 0, \quad x > 2y$$

et l'expression (50) a pour valeur

$$2 \sum (-1)^{\frac{x+y}{2}} y.$$

On a donc la formule nouvelle

$$(52) \quad \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \leq \frac{8N-1}{8}}} (-1)^m F(8N - 1 - 8m^2) = \sum y (-1)^{\frac{x+y}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux représentations

$$8N - 1 = x^2 - 2y^2, \quad \text{avec} \quad x, y \geq 0, \quad x > 2y.$$

41. En partant du produit de $\eta, \theta, \theta\eta, \Theta, \Pi: \Theta^2$ par Θ , et utilisant la formule fondamentale (8), on trouve, par un calcul tout semblable,

$$(53) \quad 2 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \leq \frac{8N-1}{8}}} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} J\left(\frac{8N-1-(2m+1)^2}{8}\right) = \sum \left(\frac{2}{x}\right) (2y - x),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$8N - 1 = x^2 - 2y^2, \quad x, y \geq 0, \quad x > 2y.$$

Si $8N + 1$ est un carré, δ^2 , le terme $\left(\frac{2}{\delta}\right)(-\delta)$ du second membre, qui répond à $x = \delta$, $y = 0$, doit être divisé par 2; et, comme toujours, $\chi_4(0) = -1$.

42. *Remarque.* — En chassant, dans (20), le dénominateur Θ , et égalant les termes constants dans les deux membres nouveaux, on retrouverait (52). De même (53) s'obtiendrait à partir de (22).

43. Nous établirons plus loin, par une autre méthode, des relations du même genre; restant dans un ordre d'idées analogue, nous donnerons ici des formules qui se rattachent au premier type de Lionville, et qui dérivent d'un développement plus compliqué.

Ce développement est le suivant :

$$\begin{aligned} \Theta' \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^2} = & 12 \Theta_1(2x, q^2) \sum_0^{\frac{1}{2}y+3} q^{\frac{1}{2}y+3} F_1(1/2, 3) + 12 \Pi_1(2x, q^2) \sum_0^{\infty} q^{2y} G(y) \\ & + 4 \sum_1^{\infty} q^{2m^2} \left[(2m-3)q^{-\frac{1}{2}} + \dots + (2m-6\mu+3)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{2}} + \dots \right. \\ & \left. + (-4m+3)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right] \cos 4mx \\ & + 4 \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[\frac{2m+1}{2} + \dots + (2m-6\mu+1)q^{-2\mu^2} + \dots \right. \\ & \left. + (-4m+1)q^{-1/2} \right] \cos(4m+2)x \\ & + 2q^{\frac{1}{2}} \cos 2x. \end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant membre à membre les développements de Θ' et de $\chi_4 \theta_1 \theta_1 \Pi_1 \Theta_1 \Pi : \Theta^2$, il résulte de la relation précédente que le terme constant et le terme en $\cos 2x$ seront respectivement

$$12 \chi_4' \sum_0^{\frac{1}{2}y+3} q^{\frac{1}{2}y+3} F_1(1/2, 3) \quad \text{et} \quad \chi_4' \left[2q^{\frac{1}{2}} + 24q^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} q^{2y} G(y) \right].$$

En calculant ces termes directement, dans la multiplication, on obtient deux identités en q , qui conduisent sans difficulté à deux for-

mules qu'on résume en celle-ci :

$$6 \sum_{m \geq 0} (-1)^m (2m+1) F_1 \left(\frac{M - (2m+1)^2}{2} \right) = \sum (x-y)(x+2y)(-1)^{\frac{r-1}{2}},$$

M désignant un entier $\equiv \pm 1 \pmod{8}$, et la dernière somme s'étendant aux représentations

$$M = x^2 - 2y^2, \quad \text{avec} \quad x, y \geq 0, \quad x > 2y.$$

Toutefois, si M est un carré, δ^2 , on divise par 2, au second membre, le terme qui provient de la représentation $M = \delta^2 - 2.0^2$.

44. Les autres formules de ce Chapitre dérivent des développements des quotients tels que $H:\Theta^2$, établis par Biehler dans sa Thèse⁽¹⁾. Biehler a trouvé

$$\frac{1}{4} \eta_1^2 \theta_1^2 \theta \frac{H}{\Theta^2} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu+1} (m+\mu-1) q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \sin(2m-1)x,$$

développement du même type que celui de $1:\Theta$, donné dans les *Fundamenta*.

On a, d'ailleurs (n° 14),

$$H\theta_1 = e^{-\frac{i\pi}{8}} \eta_1 \left(iq^{\frac{1}{2}} \right) \sum_1 q^{\frac{(2m-1)^2}{8}} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + 1} \sin(2m-1)x.$$

Multiplions membre à membre les deux dernières relations; au nouveau premier membre, d'après la première équation (3), le terme indépendant de x est $1.\theta\eta_1$; au nouveau second membre, c'est

$$e^{-\frac{i\pi}{8}} \eta_1 \left(iq^{\frac{1}{2}} \right) \sum_{m, \mu=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + \mu} (m+\mu-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{8} + \frac{(2\mu-1)^2}{4} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Mais la formule (n° 14), $\eta_1^2(q) = 2\eta_1(q^2)\theta_1(q^2)$, donne

$$\eta_1^2 \left(iq^{\frac{1}{2}} \right) = 2\eta_1(-q)\theta_1(-q) = 2e^{\frac{i\pi}{8}} \eta_1 \theta;$$

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1879.

il reste dès lors

$$\frac{1}{2} \alpha e^{\frac{i\pi}{h}} \gamma_1 \left(i q^2 \right) = \sum_{m, \mu=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m+m+1}{2} + \mu} (m + \mu - 1) q^{\frac{(2m-1)^2}{8} + \frac{(2\mu-1)^2}{8} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Le coefficient de α au premier membre est la série

$$\sum_0^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} (-1)^{\frac{m+m+1}{2}};$$

égalons maintenant dans les deux membres les coefficients de $q^{\frac{N-1}{8}}$.

Au premier membre, en remplaçant α par sa valeur (n° 8), le coefficient cherché est

$$(54) \quad \sum_{m=0}^N \left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2} \right] (-1)^{\frac{m+m+1}{2}}.$$

Au second membre, nous devons poser

$$8N-1 = (2m+1)^2 + 2(2\mu-1)^2 + 4(2m-1)(2\mu-1),$$

avec $m, \mu \geq 1$, c'est-à-dire

$$(55) \quad 8N-1 = (2m+4\mu-3)^2 - 2(2\mu-1)^2,$$

et le coefficient cherché est

$$(56) \quad \sum (m + \mu - 1) (-1)^{\frac{m+m+1}{2} + \mu}.$$

L'équation (55) s'écrit

$$8N-1 = x^2 - 2y^2, \quad (x \text{ et } y \text{ nécessairement impairs}),$$

avec $x, y > 0$ et $x > 2y$; l'expression (56) devient

$$\sum \frac{x-y}{2} (-1)^{N+1},$$

de sorte qu'on arrive à la formule

$$2 \sum_{m \geq 0} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Gamma \left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2} \right] = (-1)^{N+1} \sum (x-y),$$

la dernière somme s'étendant toujours aux représentations

$$8N-1 = x^2 - 2y^2,$$

avec $x, y > 0$; $x > 2y$.

43. Partons encore du développement ci-dessus de $\Pi; \Theta^2$, et de (n° 14)

$$\frac{1}{\theta(q^2)} \Pi \Pi = 2 \sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \sin(4m+2)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons, dans les deux membres, les coefficients des termes en $\cos x$; nous arrivons, par un calcul semblable à celui du numéro précédent, à la formule

$$(57) \quad \sum_{m \geq 0} (-1)^m \Gamma(N-2m^2) = (-1)^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \sum x,$$

la dernière somme s'étendant encore aux représentations

$$N = x^2 - 2y^2, \quad \text{avec} \quad y \geq 0, \quad x \geq 2y,$$

avec la restriction que le terme qui provient d'une représentation dans laquelle $y = 0$, ou $x = 2y$, doit être divisé par 2.

Remarque. — Stieltjes a indiqué ⁽¹⁾ deux formules qui rentrent, comme cas particuliers, dans la relation (57) ci-dessus : elles se rapportent aux cas de N impair ou impairement pair. Mais aucun renseignement n'est donné par lui sur l'origine de ces formules; Stieltjes dit seulement que la présence d'une forme indéfinie sera sans doute la

(1) *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 82-83.

source de très grandes difficultés si l'on veut entreprendre de les retrouver par l'analyse des fonctions elliptiques. « Je ne crois pas, ajoute-t-il, qu'on ait jamais vu s'introduire, dans ces calculs, des formes d'un déterminant positif, telles que $x^2 - 2y^2$. » Il est clair, d'après cela, que la méthode qui l'avait guidé diffère essentiellement de celle qui précède.

46. Enfin, en opérant de même sur les formules qui donnent les développements de $\eta_1 \theta_1^2 \theta_2^2 \Theta_1 : \Theta^2$ et $\Pi_1 \Theta_1 : \eta_1 (\sqrt{q})$ [BIEHLER, *loc. cit.*, p. 84⁽¹⁾, et n° 14 de ce Mémoire], on arrive, en s'appuyant sur la première formule (7), et en posant $I(n) = F(n) - 3F_1(n)$, à la relation

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} I \left[\frac{8N+1-(2m+1)^2}{8} \right] = \sum (x-y);$$

la dernière somme porte sur les représentations

$$8N+1 = x^2 - 2y^2,$$

avec $y \geq 0$, $x > 2y$. Toutefois, le terme provenant d'une représentation où $y = 0$ devra être divisé par 2.

47. Observation générale. — Nous avons, dans ce qui précède, considéré les solutions de l'équation $N = x^2 - 2y^2$, pour lesquelles $y \geq 0$, $x > 2y$.

D'autre part, Dirichlet a montré que toutes les solutions ξ, η de cette équation se déduisent simplement des solutions X, Y , pour lesquelles $Y \geq 0$, $2X > 3Y$, et cela, par la formule

$$\xi + \eta \sqrt{2} = (X + Y \sqrt{2}) (3 + 2\sqrt{2})^n \quad (n \geq 0).$$

(1) La formule de Biehler est :

$$\begin{aligned} \eta_1 \theta_1^2 \theta_2^2 \Theta_1 : \Theta^2 \\ = 2 \sum_1^{\infty} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} (2\mu-1) + 4 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} (2m+2\mu-1) q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + 2\mu-1+m} \cos 2m\pi. \end{aligned}$$

Les solutions ξ, η déduites ainsi d'une solution X, Y forment une même série.

Quelle relation y a-t-il entre les x, y et les X, Y ?

Élargissant un peu la question, appelons solutions x, y non seulement celles définies ci-dessus, mais aussi les solutions $x, -y$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions telles que

$$y \geq 0; \quad x \geq 2 \bmod y.$$

Soit maintenant une solution X, Y ; adjoignons-lui la solution X', Y' , de la même série, définie par

$$X' + Y'\sqrt{2} = (X + Y\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}),$$

c'est-à-dire

$$X' = 3X - 4Y; \quad Y' = -(2X - 3Y).$$

Une des solutions X, Y et X', Y' est une solution x, y . En effet, si $X \geq 2Y$, c'est X, Y ; si $X < 2Y$, c'est X', Y' : car Y' étant négatif (par l'hypothèse initiale $2X \geq 3Y$), on a

$$X' - 2|Y'| = 3X - 4Y - 2(2X - 3Y) = -X + 2Y,$$

quantité positive.

Toutefois, si $X = 2Y$, les deux solutions X, Y et X', Y' sont des solutions x, y : cela ne peut se produire que si X , égal à $X^2 - 2Y^2$, est le double d'un carré.

Inversement, étant donnée une solution x, y , une des deux solutions x, y et x', y' , celle-ci définie par

$$x' + y'\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}),$$

est une solution X, Y : on le reconnaît de même, en distinguant les cas de $y \geq 0$ et $y < 0$.

Donc enfin :

1° Si X n'est pas le double d'un carré, les solutions x, y correspondent chacune à chacune aux solutions X, Y , et deux solutions correspondantes font partie d'une même série. On peut donc déduire

toutes les solutions, aussi bien des x, y que des X, Y , et par la même formule.

2° Si $N = 2h^2$, les solutions $x = 2h, y = h$ et $x = 2h, y = -h$ correspondent à la même solution X, Y , à savoir $X = 2h, Y = h$; les autres solutions x, y et X, Y se correspondent chacune à chacune.

48. Stieltjes a également donné, sans démonstration complète (*Correspondance*, p. 58 et 82), des formules dont les premiers membres sont des sommes telles que

$$\sum F(n - 2m^2), \quad \sum F(n - 8m^2),$$

analogues, par suite, à celle qui figure dans (57), et dont les seconds membres s'expriment à l'aide des diviseurs de n . Mais ces relations ne sont qu'une manière d'exprimer le nombre des représentations d'un entier par la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$; c'est pourquoi nous n'en parlerons pas ici, bien que nous ayons réussi à les établir complètement par les fonctions elliptiques, et même à les étendre (1).

CHAPITRE V.

DIGRESSION ARITHMÉTIQUE SUR CERTAINES RELATIONS ENTRE LES MINIMA DES FORMES DE MÊME DISCRIMINANT.

49. Reprenons l'équation (E) du n° 7,

$$(E) \quad 4N + 3 = (2m + 1)(2m + 4\varphi + 3) - 4\mu^2,$$

où N est donné, et où les entiers indéterminés m, μ, φ sont assujettis

(1) On obtiendrait ces résultats en faisant $x = \frac{\pi}{4}$, ou $x = \frac{\pi\tau}{4}$, dans les formules rappelées au n° 3. C'est d'ailleurs une indication de Stieltjes lui-même, du moins pour $x = \frac{\pi}{4}$ (*loc. cit.*, p. 55).

aux conditions

$$(58) \quad m \leq 0; \quad \rho \geq 0; \quad -m \leq \mu - m.$$

Nous avons fait correspondre à (E) la forme positive

$$\varphi = (2m + 1)x^2 + 4\mu xy + (2m + 4\rho + 3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

de l'ordre propre et de discriminant $4N + 3$, où a, b, c sont dès lors assujettis aux conditions

$$c > a; \quad \text{mod } b < a; \quad b \text{ pair, } a \text{ et } c \text{ impairs,}$$

et, pour avoir le nombre des solutions de (E), nous avons cherché le nombre *des formes* φ , qui lui est égal.

Nous avons alors vu qu'à toute réduite de discriminant $4N + 3$, et de l'ordre propre

$$\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

correspondait *une et une seule forme* φ , équivalente à φ_0 , et qu'on obtient par le Tableau suivant :

1^o $\beta \leq 0$.

$$\begin{array}{ll} \alpha \text{ impair, } \gamma \text{ impair} \dots\dots & \varphi = \varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma) \\ \alpha \text{ pair, } \gamma \text{ impair} \dots\dots\dots & \varphi = (\gamma, \gamma - \beta, \gamma - 3\beta + \alpha) \\ \alpha \text{ impair, } \gamma \text{ pair} \dots\dots\dots & \varphi = (\alpha, \beta - \alpha, \gamma - 2\beta + \alpha) \end{array}$$

2^o $\beta < 0$.

$$\begin{array}{ll} \alpha \text{ impair, } \gamma \text{ impair} \dots\dots\dots & \varphi = (\alpha, \beta, \gamma) \\ \alpha \text{ pair, } \gamma \text{ impair} \dots\dots\dots & \varphi = (\gamma, -\gamma - \beta, \gamma + 3\beta + \alpha) \\ \alpha \text{ impair, } \gamma \text{ pair} \dots\dots\dots & \varphi = (\alpha, \beta + \alpha, \gamma + 3\beta + \alpha) \end{array}$$

Nous en avons conclu de suite, avec Hermite, que le nombre des solutions de (E) est égal au nombre des réduites φ_0 , c'est-à-dire à $F(4N + 3)$.

50. On peut évaluer ce nombre de solutions d'une autre manière.

Écrivons (E) :

$$(E') \quad 4N+3 = (2m+2\varphi+2-2|\mu|)(2m+2\varphi+2+2|\mu|) - (2\varphi+1)^2,$$

et considérons la forme positive

$$\begin{aligned} \psi = & (2m+2\varphi+2-2|\mu|)x^2 + 2(2\varphi+1)xy \\ & + (2m+2\varphi+2+2|\mu|)y^2, \end{aligned}$$

ou

$$\psi = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Elle est de l'ordre *impropre* et de discriminant $4N+3$; ses coefficients a, b, c sont assujettis, par (58), aux conditions

$$a+c-2b > 0; \quad b > 0; \quad c-a < c+a-2b;$$

et

$$c+a \equiv c-a \equiv 0 \pmod{4}; \quad c \geq a.$$

La condition $a+c-2b > 0$ est vérifiée d'elle-même, puisque ψ est une forme positive; $c-a \equiv 0 \pmod{4}$ résulte de $c+a \equiv 0 \pmod{4}$; donc enfin les coefficients d'une *forme* ψ vérifient uniquement les conditions

$$b > 0; \quad |b| < a; \quad c \geq a; \quad a+c \equiv 0 \pmod{4}.$$

Naturellement a et c sont pairs, puisque ψ est de l'ordre *impropre*; b est nécessairement impair, par $ac-b^2 = 4N+3$.

A toute solution de (E') correspond ainsi une forme ψ ; inversement, à une forme ψ correspondent *deux* solutions de (E'), car la connaissance de ψ détermine m, φ et $|\mu|$, c'est-à-dire m, φ et $\pm \mu$. Toutefois, si $a=c$, c'est-à-dire si $\mu=0$, à ψ ne répond qu'une solution de (E').

Observons maintenant que les inégalités $b > 0, b < a, c \geq a$ expriment que le point représentatif de ψ est (*fig. 1*, p. 347) à *gauche* de Oy, dans l'une des régions 1, 2, 4, arc CAH compris; il est sur CAH si $a=c$, et inversement: ψ est alors ambiguë. Il en résulte que le nombre des solutions de (E') est égal à celui des formes ψ où les coefficients sont assujettis aux mêmes conditions que ci-dessus, sauf $b > 0$: car, à *deux* formes opposées non équivalentes, c'est-à-dire non ambi-

guës, (a, b, c) et $(a, -b, c)$, répondront *deux* solutions, $(m, \varphi, \pm \mu)$, de (E'); à une forme ambiguë, c'est-à-dire équivalente à son opposée [et le cas ne se présente que pour $a = c$, à cause de $ac - b^2 \equiv 3 \pmod{4}$], répondra *une* solution, $(m, \varphi, 0)$, de (E').

Donc, enfin, on a à chercher combien il existe de formes (a, b, c) de l'ordre impropre, ayant leur point représentatif dans la région totale 1, 2, 3, 4, 5 (arc CH compris), de discriminant $4N + 3$, et telles que $a + c \equiv 0 \pmod{4}$.

Soit alors $\psi_0 = (x, \beta, \gamma)$ une forme réduite quelconque de l'ordre impropre; en étudiant ses équivalentes dont le point représentatif est dans 1, 2, 3, 4 ou 5, on arrive sans difficulté aux résultats suivants :

$$1^o \quad \beta > 0 \quad (\beta = 0 \text{ est impossible par } x\gamma - \beta^2 = 4N + 3).$$

Formes cherchées.

$$\begin{array}{ll} x \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{4} & (x, \beta, \gamma), (\gamma, \gamma - \beta, \gamma - 2\beta + x), (x, \beta - x, \gamma - 2\beta + x) \\ x \equiv 0, \quad \gamma \equiv 2 & (x, \beta - x, \gamma - 2\beta + x) \\ x \equiv 2, \quad \gamma \equiv 0 & (\gamma, \gamma - \beta, \gamma - 2\beta + x) \\ x \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0 & (x, \beta, \gamma) \end{array}$$

$$2^o \quad \beta < 0.$$

$$\begin{array}{ll} x \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{4} & (x, \beta, \gamma), (\gamma, -\gamma - \beta, \gamma + 2\beta + x), (x, \beta + x, \gamma + 2\beta + x) \\ x \equiv 0, \quad \gamma \equiv 2 & (x, \beta + x, \gamma + 2\beta + x) \\ x \equiv 2, \quad \gamma \equiv 0 & (\gamma, -\gamma - \beta, \gamma + 2\beta + x) \\ x \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0 & (x, \beta, \gamma) \end{array}$$

Distinguons maintenant deux cas.

$1^o \quad 4N + 3 \equiv 7 \pmod{8}$. — En ce cas, par $x\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, il est impossible qu'on ait $x \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{4}$; il résulte alors des Tableaux précédents qu'à toute réduite ψ_0 correspond une et une seule des formes cherchées. Le nombre de celles-ci, c'est-à-dire le nombre des solutions de (E'), (ou E), est donc, avec nos notations habituelles, $F_4(4N + 3)$, ce qui donne une nouvelle démonstration de la relation classique

$$F_4(M) = F(M), \quad [M \equiv 7 \pmod{8}].$$

$2^n \cdot 4N + 3 \equiv 3 \pmod{8}$. — Alors, par $2\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, on a nécessairement $2\gamma \equiv \beta^2 \equiv 3 \pmod{4}$; c'est-à-dire qu'à une réduite ψ_0 correspondent *trois* ⁽¹⁾ des formes cherchées; d'où

$$F_1(M) = \frac{1}{3} F(M), \quad [M \equiv 3 \pmod{8}].$$

§1. Mais les Tableaux précédents nous donneront encore d'autres conséquences.

Soient h, k, l des quantités réelles quelconques, considérons la somme

$$\sum (4m + 4\rho + 4 - 4|\mu|)^h (2m + 1)^k (4\rho + 2)^l$$

étendue à toutes les solutions de (E) qui vérifient (58).

Les Tableaux du n° 49 établissent entre les réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N + 3$, et les solutions de (E) les relations suivantes.

A une réduite (α, β, γ) , où α impair, γ impair, répond la solution de (E) :

$$2m + 1 = \alpha, \quad 2\mu = \beta, \quad 2m + 4\rho + 3 = \gamma.$$

Si α pair, γ impair :

$$2m + 1 = \gamma, \quad 2\mu = \varepsilon\gamma - \beta, \quad 2m + 4\rho + 3 = \gamma - 2\varepsilon\beta + \alpha.$$

Si α impair, γ pair :

$$2m + 1 = \alpha, \quad 2\mu = \beta - \varepsilon\alpha, \quad 2m + 4\rho + 3 = \gamma - 2\varepsilon\beta + \alpha,$$

$\varepsilon = \pm 1$ selon que $\beta \geq 0$ ou $\beta < 0$.

⁽¹⁾ Ces trois formes ne coïncident que si (α, β, γ) a pour point représentatif le point A ou le point B de la figure 1, c'est-à-dire si (α, β, γ) équivaut à $ax^2, x^2 + 2xy + y^2$. Pour que la proposition du texte subsiste, il faut donc convenir de compter une telle réduite (ou classe) pour $\frac{1}{3}$. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

Il en résulte, par un calcul immédiat, que la somme considérée s'obtient en ajoutant les trois sommes

$$\sum (z + \gamma - 2|\beta|)^h z^h (\gamma - z)'; \quad \sum z^h \gamma^h (z - 2|\beta|)'; \quad \sum \gamma^h z^h (\gamma - 2|\beta|)'$$

étendues respectivement aux réduites propres (z, β, γ) de discriminant $4N + 3$, pour lesquelles

$$z \text{ impair, } \gamma \text{ impair; } \quad z \text{ pair, } \gamma \text{ impair; } \quad z \text{ impair, } \gamma \text{ pair.}$$

En d'autres termes, la somme considérée n'est autre chose que

$$\sum m^h m_1^h (m_2 - m_1)',$$

somme étendue cette fois à *toutes* les réduites *propres* de discriminant $4N + 3$; m_1 et m_2 ($m_1 < m_2$) y désignent les deux premiers *minima impairs*, m le *minimum pair* d'une quelconque de ces réduites.

En utilisant les Tableaux du n° 30, on trouve de même, *pour deuxième expression de la somme considérée*, la valeur suivante :

$$1^\circ \quad 4N + 3 \equiv 7 \pmod{8},$$

$$\sum (2\mu_1)^h \left(\frac{\mu}{2}\right)^h (\mu_1 + \mu_2 - \mu)',$$

où μ_1, μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$) et μ sont respectivement les deux premiers minima $\equiv 6 \pmod{4}$ et le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ d'une réduite quelconque *impropre*, de discriminant $4N + 3$.

$$2^\circ \quad 4N + 3 \equiv 3 \pmod{8}.$$

$$\begin{aligned} & \sum (2\gamma_1)^h \left(\frac{\gamma_3}{2}\right)^h (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3)' + \sum (2\gamma_1)^h \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)^h (\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_2)' \\ & + \sum (2\gamma_2)^h \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^h (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1)', \end{aligned}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ($\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$) désignent les trois premiers minima d'une

réduite *impropre* quelconque, de discriminant $4N + 3$ ⁽¹⁾.

§2. Identifions maintenant les valeurs obtenues par les deux méthodes, et supposons d'abord $4N + 3 \equiv 7 \pmod{8}$; on a

$$(58) \quad \sum m^h m_1^k (m_2 - m_1)^l = \sum (2\mu_1)^h \left(\frac{1}{2}\mu\right)^k (\mu_1 + \mu_2 - \mu)^l,$$

les sommes, aux deux membres, s'étendant respectivement aux classes propres et impropres de discriminant $4N + 3$.

Dans les deux membres, il y a un même nombre de termes; de plus, h, k, l étant quelconques, il résulte d'un principe bien connu ⁽²⁾ dans la théorie des nombres que les deux membres doivent être identiques, terme à terme.

Par suite :

A toute classe propre de discriminant $\equiv 7 \pmod{8}$ correspond une classe impropre du même discriminant; si m_1, m_2 sont les minima impairs et m le minimum pair ($m_1 \leq m_2$) de la propre, si μ_1, μ_2 sont les deux minima $\equiv 0 \pmod{4}$ ($\mu_1 \leq \mu_2$) et μ le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ de l'impropre correspondante, on a

$$\mu_1 = \frac{1}{2}m, \quad \mu_2 = m_1 + m_2 - \frac{1}{2}m, \quad \mu = 2m_1.$$

§3. Soit maintenant $4N + 3 \equiv 3 \pmod{8}$. De la relation analogue à (58) qui résulte immédiatement du n° §1, on déduit ce théorème:

A toute classe impropre de discriminant $\equiv 3 \pmod{8}$ en correspondent trois propres du même discriminant; si ν_1, ν_2, ν_3 sont les trois premiers minima de l'impropre ($\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$), si $m_1, m_2; m'_1, m'_2; m''_1, m''_2$ sont les minima impairs et m, m', m'' les minima

(1) En vertu de la Note de la page 388, si une des réduites est

$$a(2x^2 + 2xy + 2y^2),$$

il faut diviser par 3 la partie de l'expression précédente qui lui correspond.

(2) DIRICHLET-DEDEKIND, *Zahlentheorie*, 3^e édition, p. 227.

pairs des trois propres correspondantes ($m_1 \leq m_2, \dots$), on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} m &= 2\gamma_1, & m' &= 2\gamma_1, & m'' &= 2\gamma_2, \\ m_1 &= \frac{1}{2}\gamma_3, & m'_1 &= \frac{1}{2}\gamma_2, & m''_1 &= \frac{1}{2}\gamma_1, \\ m_2 &= \gamma_1 + \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3, & m'_2 &= \gamma_1 + \gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_2, & m''_2 &= \gamma_2 + \gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_1. \end{aligned}$$

54. COROLLAIRES. — 1° Les premiers minima impairs des trois classes propres associées à une même impropre étant toujours m_1, m'_1, m''_1 , les seconds minima impairs (m_2, m'_2, m''_2) ont pour expressions, par ce qui précède,

$$2m'_1 + 2m''_1 - m_1, \quad 2m_1 + 2m'_1 - m''_1, \quad 2m_1 + 2m''_1 - m'_1.$$

Leur somme est $3(m_1 + m'_1 + m''_1)$, d'où ce théorème énoncé par Liouville sans démonstration :

La somme des seconds minima impairs des classes propres de discriminant $8M + 3$ est trois fois la somme de leurs premiers minima impairs.

2° De même, on établirait que :

La somme des carrés des seconds minima impairs est neuf fois celle des carrés des premiers minima impairs.

3° Considérons enfin, avec Liouville, la somme $\sum a(a' - a)$, a et a' ($a \leq a'$) étant les deux minima impairs d'une classe propre quelconque de discriminant $8M + 3$. Par ce qui précède

$$\begin{aligned} \sum a(a' - a) &= \sum m_1(2m'_1 + 2m''_1 - 2m_1) \\ &\quad + m'_1(2m_1 + 2m''_1 - 2m'_1) + m''_1(2m_1 + 2m'_1 - 2m''_1) \end{aligned}$$

(1) Si le discriminant est du type $3a^2$, parmi les classes impropres de ce discriminant figure celle de la forme $a(x^2 + 2xy + 2y^2)$; il ne correspond à celle-là qu'une propre $a(x^2 + 3y^2)$, et les relations ci-dessus subsistent entre les minima des deux classes.

ou

$$\sum a(a' - a) = 2 \sum 2m_1 m'_1 + 2m_1 m''_1 + 2m'_1 m''_1 - m_1^2 - m'^2_1 - m''^2_1.$$

Mais l'expression du discriminant $8M + 3$ en fonction des trois minima ν_1, ν_2, ν_3 d'une classe impropre est

$$4(8M + 3) = 2\nu_1 \nu_2 + 2\nu_1 \nu_3 + 2\nu_2 \nu_3 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2,$$

c'est-à-dire, par ce qui précède,

$$8M + 3 = 2m_1 m'_1 + 2m_1 m''_1 + 2m'_1 m''_1 - m_1^2 - m'^2_1 - m''^2_1;$$

d'où, avec notations habituelles,

$$\sum a(a' - a) = \frac{3}{8}(8M + 3)F(8M + 3).$$

Toutes ces propositions ont été données par Liouville sans démonstration.

35. Les formules des nos 32 et 35 relatives aux minima donneraient sans difficulté les expressions des formes propres et impropres qui sont en correspondance. On reconnaîtrait ainsi aisément que :

1^{re} $4N + 3 \equiv 7 \pmod{8}$. — L'impropre étant (A, B, C) , la correspondante propre est l'une des trois formes

$$\left(\frac{\Lambda}{2}, B, 2C\right), \quad \left(2\Lambda, B, \frac{C}{2}\right), \quad \left(2\Lambda, B - \Lambda, \frac{\Lambda - 2B + C}{2}\right),$$

dont une seule est d'ailleurs propre.

2^{re} $4N + 3 \equiv 3 \pmod{8}$. — Les trois formes ci-dessus sont propres et sont celles qui répondent à l'impropre.

On retombe ainsi sur un résultat bien connu, par exemple dans la théorie de la multiplication complexe⁽¹⁾; mais, à ma connaissance du

⁽¹⁾ WEBER, *Elliptische Functionen*, p. 339-341. — Voir aussi LIPSCHITZ, *Crelle*, t. 53.

moins, les relations entre les minima des classes correspondantes n'ont pas encore été remarquées explicitement.

CHAPITRE VI.

1^{re} FORMULES OU INTERVIENNENT LES MINIMA DES CLASSES DE MÊME DISCRIMINANT.

56. Les premiers membres des formules de Kronecker sont des sommes algébriques d'expressions telles que $F(N - x^2)$, les seconds membres sont fonctions des diviseurs de N ; dans les relations qui vont être établies maintenant, les premiers membres sont des sommes du type $\sum \pm F(N - x^2 - y^2)$, tandis que les seconds membres s'expriment à l'aide des *minima* des formes de discriminant N .

37. *Expression de $A\theta^2$.* — Partons de la relation (2), (n^o 4),

$$\frac{1}{4} \theta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^2} = \sum_1 q^{m^2} (-1)^{m+1} a_m \sin 2mx,$$

où

$$a_m = q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{2m-1}{4}};$$

et multiplions membre à membre avec la formule classique (1)

$$\theta_1 \theta \frac{\Pi}{\Pi_1} = \tan x + i \sum_1 (-1)^m \frac{q^{2m}}{1 + q^{2m}} \sin 2mx.$$

Égalons ensuite, dans les deux membres nouveaux développés en séries de Fourier, les termes indépendants de x .

Au premier membre, le terme cherché est $A\theta^2$, en vertu même de la première relation (3). Au second membre, si l'on observe que, dans le développement en série de $\tan x \sin 2mx$, le terme indépendant

(1) HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV, p. 41; *Œuvres*, t. II, p. 343.

Journ. de Math. (6^e série), tome III. — Fasc. IV, 1907.

est $(-1)^{m-1}$, on a, pour le terme cherché,

$$\sum_1 q^{m^2} a_m - 2 \sum_1 q^{m^2} a_m \frac{q^{2m}}{1+q^{2m}},$$

d'où la relation

$$\mathfrak{A}\theta^2 = \sum_1 q^{m^2} a_m \frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}} = \sum_1 q^{m^2} a_m [1 - 2q^{2m} + \dots + 2(-1)^p q^{2pm} + \dots].$$

Dans les deux membres, égalons maintenant les coefficients de $q^{\frac{N+3}{2}}$; au premier membre, on a évidemment, par l'expression de \mathfrak{A} (n° 8),

$$(59) \quad \sum_{x, y \geq 0} (-1)^{x+y} F(4N+3-4x^2-4y^2).$$

Au second membre, il faut poser

$$(60) \quad 4N+3 = 4m^2 - (2\mu-1)^2 + 8m\varphi \quad (m \geq 1, \varphi \geq 0, 1 \leq \mu \leq m),$$

et le coefficient considéré est

$$(61) \quad \sum (-1)^{\mu+\varphi-1} 2(2\mu-1),$$

la somme s'étendant aux solutions de (60) en m, μ, φ , qui satisfont aux inégalités indiquées. Toutefois, une solution où $\varphi = 0$ donne $(-1)^{\mu-1} 2(2\mu-1)$ et non $(-1)^{\mu-1} 2(2\mu-1)$, parce que, dans l'expression ci-dessus de $\mathfrak{A}\theta^2$, le premier terme du crochet est 1 et non 2, comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

Pour évaluer la somme (61), écrivons (60) :

$$4N+3 = (2m+2\varphi-2\mu+1)(2m+2\varphi+2\mu-1) - 4\varphi^2,$$

et faisons correspondre à la solution (m, μ, φ) la forme

$$\varphi = (2m+2\varphi-2\mu+1)x^2 + 4\varphi xy + (2m+2\varphi+2\mu-1)y^2,$$

ou plus simplement (a, b, c) .

D'après cela, et d'après les inégalités (60), φ est une forme positive, de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; ses coefficients sont assujettis à

$$\begin{aligned} a \text{ et } c \text{ impairs,} \quad a+c &\equiv 0 \pmod{4}, \\ c-a &\equiv 2 \pmod{4}, \quad b \text{ pair,} \\ a+c-2b &\geq 2, \quad b \geq 0, \quad 4 \leq c-a+2 \leq a+c-2b. \end{aligned}$$

Ces conditions se réduisent évidemment aux suivantes :

$$(62) \quad a \text{ et } c \text{ impairs,} \quad c > a, \quad a > b, \quad b \geq 0.$$

Les trois dernières expriment que le point représentatif de φ est situé (*fig. 1*, p. 347) à gauche de OY , dans l'une des régions 1, 2, 4; il peut être sur OY , mais non sur le reste du contour total.

A chaque solution de (60) correspond ainsi une forme φ , et réciproquement; de sorte que la somme (61), à évaluer, s'écrit :

$$(63) \quad 2 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(c-a+2b-2)} \frac{c-a}{2},$$

étendue cette fois aux formes φ ; toutefois si $b=0$, le terme correspondant de la somme (63) doit être divisé par 2. Ce cas d'exception est précisément le seul cas où la forme φ , *propre*, et de discriminant $4N+3$, puisse être ambiguë.

Maintenant soit $\varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; les seules formes équivalentes qui *puissent* avoir leur point représentatif dans la région indiquée ci-dessus sont :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (\alpha, \beta, \gamma), \quad \varphi_1 = (\alpha, \beta + \alpha, \gamma + 2\beta + \alpha), \\ \varphi_2 &= (\gamma, -\beta + \gamma, \gamma - 2\beta + \alpha). \end{aligned}$$

1^o α et γ *impairs*. — φ_0 peut seule être une forme φ , et ne l'est que si $\beta \geq 0$. En ce cas, elle donne, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{2}(\gamma - \alpha + 2\beta - 2)} \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

qu'on écrit aussi

$$(64) \quad (\mu_2 - \mu_1)^{\frac{1}{2}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

en désignant par μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leq \mu_2$) les deux minima impairs de φ_0 ; par μ son minimum pair. (Ici, en effet, $\mu_1 = \alpha$, $\mu_2 = \gamma$, $\mu = \alpha + \gamma - 2\beta$).

Si $\beta = 0$, le terme (64) doit être divisé par 2.

En d'autres termes, si l'on introduit à la fois les deux formes *opposées* (α, β, γ) et $(\alpha, -\beta, \gamma)$, qui, ici, ne peuvent être équivalentes que pour $\beta = 0$, on peut dire qu'une réduite (α, β, γ) *quelconque*, pour laquelle α et γ sont impairs, β étant $= 0$, donne dans la somme (63) le terme

$$\frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{1}{2}(2\mu_2 - \mu - 2)}.$$

2° α impair; γ pair. — φ_1 seule peut être une forme φ , et ne l'est que si $\beta \leq 0$. (Ici β ne peut être nul, car $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$ montre que β est impair). Il lui correspond, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{2}(\gamma + 2\beta + 2\alpha - 2)} \frac{\gamma + 2\beta}{2} \quad \text{ou} \quad (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{1}{2}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

car $\mu_1 = \alpha$, $\mu_2 = \alpha + \gamma + 2\beta$, $\mu = \gamma$. On peut dire aussi que, à *toute* réduite (α, β, γ) pour laquelle α est impair et γ pair, répond encore, dans (63), le terme

$$\frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{1}{2}(2\mu_2 - \mu - 2)}.$$

3° α pair; γ impair. — C'est ici φ_2 qui s'introduit, et le résultat est le même.

Donc enfin, la somme (63), que nous savons égale à l'expression (59), n'est autre chose que la somme

$$\frac{1}{2} \sum (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{1}{2}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

étendue à *toutes* les classes propres de discriminant $4N + 3$; μ_1 et μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$) désignent les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

D'ailleurs, on peut simplifier un peu l'expression de l'unité qui figure dans la somme. En effet, la valeur du discriminant en fonction des trois minima :

$$4(4N+3) = -(\mu_2 - \mu_1 + \mu)^2 + 4\mu\mu_2$$

donne

$$\mu\mu_2 = 4N+3 + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1 + \mu}{2}\right)^2.$$

Le premier membre étant pair (à cause de μ), on en conclut que $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1 + \mu)$ est impair, et dès lors $\mu\mu_2 \equiv 0 \pmod{4}$, c'est-à-dire $\mu \equiv 0 \pmod{4}$; de plus

$$\mu\mu_2 \equiv 4N + 4 \pmod{8} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}\mu\mu_2 \equiv N + 1 \pmod{2}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mu_2 - \mu - 2)} &= (-1)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2 - \mu - 2))} \\ &= (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2-1)} = (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_2-1)}, \end{aligned}$$

car μ_2 est impair, par définition.

D'ailleurs, $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1 + \mu)$ étant impair et $\mu \equiv 0 \pmod{4}$, on voit que $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ est impair, c'est-à-dire que

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1+1)}.$$

38. Finalement, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \neq 0} (-1)^{x+y} \Gamma(4N+3-4x^2-4y^2) \\ = \frac{1}{2}(-1)^N \sum (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1-1)}. \end{aligned}$$

Au premier membre, la somme porte sur toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de x, y , telles que $4N+3-4x^2-4y^2$ ne soit pas négatif; on tient compte de l'ordre de x^2 et de y^2 , c'est-

à-dire que, si $x \geq y$, on a à prendre les *deux* termes

$$(-1)^{x+y} F(4N+3-4x^2-4y^2)$$

et

$$(-1)^{y+x} F(4N+3-4y^2-4x^2);$$

c'est-à-dire à doubler le premier de ces termes.

Au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4N+3$; μ_1, μ_2 ($\mu_1 \leq \mu_2$) sont les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

39. Remarque. — En faisant $x = 0$ dans la troisième des relations (3), on obtiendrait l'expression de A_0 (1) :

$$A_0 = \sum_0 (-1)^y q^{\frac{4y+3}{4}} \psi(4y+3),$$

$\psi(n)$ représentant la somme des diviseurs de n inférieurs à \sqrt{n} : c'est, d'une manière plus précise, la fonction $\frac{1}{2} [\Phi(n) - \Psi(n)]$ de KRONECKER (2).

Par suite

$$A_0^2 = \sum_0 (-1)^y q^{\frac{4y+3}{4}} \psi(4y+3) \times \sum_{-\infty} (-1)^m q^{m^2};$$

ce qui donne une expression du coefficient de $q^{\frac{N+3}{4}}$ dans A_0^2 , où ne figure que la fonction ψ . On aura dès lors, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{1}{2} \sum (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} = \sum_{m \geq 0} \psi(4N+3-4m^2),$$

et, par suite, la somme qui figure au premier membre s'exprime à l'aide de la seule fonction ψ .

Des remarques analogues s'appliqueront aux formules qui suivent.

(1) Voir aussi HERMITE, *Lettre à Liouville* (*Œuvres*, t. II, p. 119-120).

(2) $\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de n ; $\Psi(n)$ est $\sum (d_1 - d)$ étendue aux décompositions $n = dd_1, d \leq d_1$.

60. *Expression de $\chi_1 \theta_1 \theta$.* — On opère, comme au n° 57, sur les formules (n° 5) :

$$\chi_1^2 \theta_1 \theta \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta^2} = 8 \sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx,$$

$$\theta_1 \frac{\Theta_1 \Pi}{\Pi_1} = \frac{1}{\cot x} + 2 \sum_1 q^{m^2} (-1)^{m+1} [1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-(m-1)^2}] \sin 2mx;$$

et l'on trouve

$$\chi_1 \chi_1 \theta_1 \theta = 8 \sum_1 (-1)^{m-1} \left[\frac{mq^m}{1+q^{2m}} + m \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}} (1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-(m-1)^2}) \right].$$

Égalant les coefficients de q^N dans les deux membres, on parvient, par des raisonnements analogues aux précédents, à la *formule*

$$4 \sum_{x, y \in \mathbb{Z}} (-1)^x F[4N - 4x^2 - (2y+1)^2] = 2 \sum \mu(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + 2)}.$$

Dans le premier membre, $4x^2$ est écrit avant $(2y+1)^2$, c'est-à-dire que l'ordre des deux carrés est fixé; au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4N$; μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leq \mu_2$) sont les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

On peut écrire aussi

$$\sum \mu(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + 2)} = 4(-1)^{N+1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu[4N - (2m+1)^2].$$

61. Des calculs semblables ⁽¹⁾, à partir des développements de

$\chi_1 \theta_1 \theta \Pi_1 \Theta_1 \Pi : \Theta^2$ et $\chi_1 \theta_1 \Pi : \Theta_1$; puis de $\theta_1^2 \chi_1 \theta_1 \theta \Pi \Theta_1 : \Theta^2$ et $\chi_1 \Pi_1 \Pi : \Theta$,

⁽¹⁾ Il faudrait seulement, au lieu des termes indépendants, égaler les termes en $\cos x$.

donneraient les expressions de

$$ab\theta^2 \quad \text{et} \quad ab\theta\theta_1;$$

ce qui conduirait aux deux formules ci-dessous :

$$2 \sum_{x, y \geq 0} (-1)^{x+y} F(N - x^2 - y^2) = \frac{(-1)^N}{2} \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu) (-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 - \mu + 2)},$$

$$2 \sum_{x, y \leq 0} (-1)^x F(N - x^2 - y^2) = \sum \mu_1 (-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 + 2)}.$$

Les seconds membres s'étendent aux classes propres de discriminant $4N$; les μ_1, μ_2, μ ont les mêmes significations qu'au n° 60. Dans les premiers membres, l'ordre des carrés entre en ligne de compte.

62. En opérant enfin d'une manière semblable, et utilisant les formules du troisième groupe (n° 8), on formerait $\in \eta_1^2$ et $\in \eta_1 \theta_1$, d'où deux formules. D'abord :

$$2 \sum_{x, y \geq 0} I \left[\frac{4N - 2 - (2x+1)^2 - (2y+1)^2}{4} \right] = \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu) (-1)^{\frac{\mu-2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étend aux classes propres de discriminant $4N - 2$; μ_1 et $\mu_2 (\mu_1 - \mu_2)$ sont les minima impairs, μ le minimum pair d'une de ces classes.

Enfin :

$$2 \sum_{x, y \neq 0} I \left[\frac{4N + 1 - 4x^2 - (2y+1)^2}{4} \right] = 2 \sum \mu_1 (-1)^{\frac{\mu-2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux classes propres de discriminant $4N + 1$; μ_1 et $\mu_2 (\mu_1 - \mu_2)$ sont les minima impairs, μ le minimum pair d'une de ces classes.

Toutefois, si $4N + 1$ est un carré, 2^2 , parmi les classes propres de discriminant $4N + 1$ figure $2x^2 + 2y^2$; le terme correspondant, au

second membre de la dernière formule, doit être divisé par 2, c'est-à-dire que, là encore, la classe compte pour $\frac{1}{2}$. Enfin $1(0) = \frac{1}{4}$.

2° PROPRIÉTÉS DE CERTAINES FONCTIONS NUMÉRIQUES LIÉES AUX MINIMA
DES CLASSES DE MÊME DISCRIMINANT.

65. On peut introduire certaines fonctions, liées aux minima des classes de même déterminant, et qui satisfont à des relations analogues à celles de Kronecker, vérifiées par les nombres de classes eux-mêmes.

64. Fonction \mathfrak{F} . — Soit \mathfrak{E} le terme indépendant de x dans le développement, en série de Fourier, de la fonction

$$\eta_1 \theta_1 \theta \Pi' \frac{\Pi_1 \Theta_1}{\Theta^2}.$$

Pour l'obtenir, on multiplie membre à membre les deux relations

$$\eta_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^2} = 4 \sum_1 q^{m^2} (-1)^{m-1} a_m \sin 2mx, \quad (\text{voir n}^\circ \text{ 37}),$$

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \cotang x + 4 \sum_1 \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2mx;$$

et l'on calcule directement le terme indépendant dans le produit des deux seconds membres. C'est un calcul analogue à celui du n° 37, et qui conduit à la formule

$$\mathfrak{E} = 2 \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N q^{N + \frac{3}{4}} \mathfrak{F}(4N + 3),$$

étant posé

$$(64') \quad \mathfrak{F}(4N + 3) = \sum (\mu_2 - \mu_1) (-1)^{\frac{\mu_2 - \mu_1 - 2}{4}};$$

la dernière somme s'étend aux classes propres de discriminant $4N + 3$, μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \geq \mu_2$) sont les deux minima impairs d'une telle classe.

D'autre part, si l'on multiplie membre à membre les développe-

ments

$$H' = 2 \sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (2m+1) \cos(2m+1)x,$$

$$\eta_1 \theta_1 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1}{\Theta^2} = 4 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \cos(2m+1)x, \quad (\text{n}^\circ 5)$$

au premier membre nouveau, le terme indépendant de x est $\pi\theta$; au second membre (développé en série de Fourier), c'est évidemment

$$4 \sum_0 (-1)^m (2m+1)^2 \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer, dans cette expression et dans $\pi\theta$, les coefficients de $q^{N+\frac{3}{4}}$ pour obtenir la *formule*

$$(-1)^N \sum_{x \geq 0} \tilde{f}(4N+3-4x^2) = 2 \sum d^2 (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux décompositions en facteurs

$$4N+3 = dd_1, \quad d < d_1.$$

Ainsi, la fonction numérique $\tilde{f}(4n+3)$, définie par (64'), en fonction des minima impairs des classes propres de discriminant $4n+3$, vérifie une relation du même genre que la fonction $F(4n+3)$, qui exprime le nombre de ces classes; seulement, au second membre apparaissent des *carrés* de diviseurs (réels et positifs), tandis que, dans les formules de Kronecker, ces diviseurs ne figurent qu'à la première puissance.

63. Fonction ζ_1 . — Si l'on calcule de même le terme indépendant, \mathfrak{z} , dans le développement de Fourier de

$$\eta_1 \theta_1 \theta \Theta_1' \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta^2},$$

en utilisant ceux de $\eta_1, \theta, \Pi, \Theta, \Pi; \Theta^2$ et $\Theta'_1; \Theta_1$, on trouve aisément

$$s = 4 \sum_0 q^{\frac{8\gamma+7}{4}} g(8\gamma+7),$$

étant posé

$$g(8\gamma+7) = \sum \mu(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2+\mu+2)},$$

somme étendue aux classes de l'ordre impropre de discriminant $8\gamma+7$, μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \geq \mu_2$) étant les deux minima $\equiv 0 \pmod{4}$, et μ le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ d'une telle classe.

D'autre part, la multiplication des développements de

$$\eta_1^2 \theta, \theta \Pi \Pi; \Theta^2, \quad (n^\circ 5),$$

et de Θ'_1 permet de calculer $s\eta_1$, d'où la formule

$$\sum_{x \geq 0} g[8N - (2x+1)^2] = -2 \sum \delta^2(-1)^{\frac{\delta_1-\delta-1}{2}},$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions

$$2N = \delta\delta_1,$$

$\delta < \delta_1$ et δ, δ_1 étant de parités différentes.

On pourrait multiplier aisément les exemples de cette nature.

3^e FORMULES OU INTERVIENNENT LES CARRÉS DES MINIMA DES CLASSES DE MÊME DISCRIMINANT.

66. *Expression de $s\eta_1\theta_1^3$.* — En dérivant le développement classique de $\Pi^2; \Theta^2$, à savoir

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \Pi^2; \Theta^2 = 8 \sum_0 \frac{mq^m}{q^{2m}} = 8 \sum_0 \frac{mq^{m-1}}{q^{2m}} \cos 2mx,$$

et utilisant les relations différentielles (n° 2), on a

$$(65) \quad \gamma_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^3} = 8 \sum_1^{\infty} \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx.$$

D'autre part (1),

$$(66) \quad \theta_1 \frac{\Theta \Pi_1}{\Pi} = \cotang x + 2 \sum_1^{\infty} q^{m^2} [1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-(m-1)^2}] \sin 2mx.$$

Multiplions (65) et (66) membre à membre, et égalons ensuite les termes constants dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier.

Le premier membre, $\gamma_1^2 \theta_1^3 \theta^2 \Pi_1^2 \Theta_1 : \Theta^2$, a pour terme constant, d'après (4),

$$(67) \quad -4 \cdot 4^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{4}} \gamma_1 \theta_1^3, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 4 \gamma_1 \theta_1^3 \sum_0^{\infty} (-1)^y q^{\gamma + \frac{3}{4}} F(4\gamma + 3).$$

Au second membre nouveau, le terme constant est (2)

$$(68) \quad 8 \sum_1^{\infty} \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} + 8 \sum_1^{\infty} m^2 \frac{q^{m^2 + m}}{1 - q^{2m}} [1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-(m-1)^2}].$$

Égalons maintenant les coefficients de q^h dans les expressions (67) et (68).

Dans (67), en vertu de la relation classique (3)

$$\gamma_1 \theta_1^3 = 2 \sum_{h=0}^{\infty} q^{h + \frac{1}{4}} \Phi(4h + 1),$$

(1) HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2^e série, t. IX, p. 145; *Œuvres*, t. II, p. 244.

(2) Car dans le développement $\cotang x \sin 2mx$, le terme constant est 1.

(3) Cette relation exprime que le nombre de décompositions de $4h + 1$ en quatre carrés, le carré impair écrit d'abord, est égal à deux fois la somme des diviseurs de $4h + 1$.

où $\Phi(n)$ désigne la somme des diviseurs de n , le coefficient de q^N est

$$8 \sum_{h \geq 0} (-1)^{N+h+1} F(4N-4h-1) \Phi(4h+1).$$

Dans (68), le coefficient de q^N se compose de deux parties.

On doit d'abord poser

$$(69) \quad N = m' + 2m'\varphi' = m'(2\varphi' + 1),$$

et prendre $8 \sum m'^2$.

Il faut poser ensuite

$$(70) \quad N = m^2 + m + 2m\varphi - \mu^2 \quad (m \geq 1, \varphi \geq 0, |\mu| \leq m-1),$$

et prendre $8 \sum m^2$, étendue à toutes les solutions m, φ, μ de cette équation, qui vérifient les inégalités indiquées.

Écrivons (70)

$$4N = (2m + 2\varphi - 2|\mu| + 1)(2m + 2\varphi + 2|\mu| + 1) - (2\varphi + 1)^2$$

et faisons correspondre à toute solution m, μ, φ la forme positive, de l'ordre propre et de discriminant $4N$,

$$\varphi = (2m + 2\varphi - 2|\mu| + 1, 2\varphi + 1, 2m + 2\varphi + 2|\mu| + 1) = (a, b, c).$$

Les coefficients de φ vérifient les conditions

$$a \text{ et } c \text{ impairs,} \quad a + c \equiv 2, \quad c - a \equiv 0 \pmod{4}, \quad b \text{ impair,}$$

$$b > 0, \quad \frac{c + a - 2b}{4} \geq 1, \quad a > b, \quad c \geq a,$$

qui, le discriminant étant $4N$, se réduisent évidemment aux suivantes :

$$(71) \quad b \text{ impair,} \quad b > 0, \quad a > b, \quad c \geq a.$$

À une solution (m, μ, φ) de (70) correspond ainsi une forme φ ; à une

forme φ répondent (à cause de $\pm \mu$) *deux* solutions de (70), sauf si $\mu = 0$.

On a donc finalement à considérer les formes φ et à prendre la somme

$$2 \times 8 \sum \frac{(a+c-2b)^2}{16} \quad \text{ou} \quad \sum (a+c-2b)^2,$$

étendue à toutes ces formes. Toutefois, si $\mu = 0$, c'est-à-dire si $c = a$, le terme $(a+c-2b)^2$ doit être divisé par 2.

Les inégalités (71) montrent que le point représentatif de φ est (fig. 1, p. 347) à gauche de Oy , dans l'une des régions 1, 2, 4, y compris le contour $MCAH$, et non compris la ligne Hy .

Soit alors $\varphi_0 = (x, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* propre, de discriminant $4N$.

1° Si β est impair et $\beta > 0$, φ_0 est une forme φ . Si $\beta < 0$, aucune équivalente de φ_0 n'est une forme φ .

Pour $\beta > 0$, φ_0 donne le terme $(x + \gamma - 2\beta)^2$, ou μ^2 , en désignant par μ le minimum pair de φ .

Toutefois, si $x = \gamma$ (ce qui est le seul cas où φ_0 puisse être ambiguë lorsque β est impair), il faut prendre seulement $\frac{1}{2}\mu^2$.

On peut donc dire, en introduisant les réduites opposées (x, β, γ) et $(x, -\beta, \gamma)$, qu'une réduite *quelconque*, propre (x, β, γ) , de discriminant $4N$, où β est impair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, μ désignant son minimum pair.

2° Si β est pair, l'un des deux coefficients x, γ est $\equiv 0 \pmod{4}$, l'autre est impair. On trouve encore, par un raisonnement semblable à celui du n° 37, qu'une réduite *quelconque*, où β est pair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$. Il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui d'une réduite ambiguë, φ_0 , pour laquelle $\beta = 0$.

En ce cas, aucune des formes

$$(x, \beta, \gamma), \quad (x, \beta \pm x, \gamma \pm 2\beta + x), \quad (\gamma, -\beta \pm \gamma, \gamma \mp 2\beta + x)$$

n'est une forme φ : car si, par exemple, c'est x qui est impair, la seule équivalente à φ_0 qui *puisse* être une forme φ est $(x, x, \gamma + x)$, et, comme en ce cas $a = b$, elle n'est effectivement pas forme φ .

Donc enfin, dans le coefficient cherché de q^N , chaque réduite propre, de discriminant $4N$, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, sauf les réduites pour lesquelles $\beta = 0$: mais les termes qui proviennent de (69), à savoir

$$8 \sum m'^2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \sum (4m')^2,$$

font évidemment disparaître l'exception, car ils s'écrivent $\frac{1}{2} \sum \mu^2$, somme étendue aux réduites *propres* de discriminant $4N$, pour lesquelles le coefficient moyen est nul.

67. Par suite, la conclusion de cette discussion est la formule :

$$(-1)^{N+1} \sum_{h \geq 0} (-1)^h F(4N - 4h - 1) \Phi(4h + 1) = \frac{1}{16} \sum \mu^2;$$

$\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de n , et la somme au second membre s'étend aux classes propres de discriminant $4N$, μ désignant le minimum pair d'une quelconque de ces classes. Bien entendu, au premier membre, h , qui part de 0, prend toutes les valeurs (positives et entières) qui ne rendent pas $4N - 4h - 1$ négatif, c'est-à-dire que $h = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$.

Cette formule est intéressante en ce qu'elle exprime $\sum \mu^2$ à l'aide seulement des deux fonctions F et Φ .

68. De même, en partant de (65) et du développement de $\eta_1 \theta \theta_1; H$, on formerait $\ominus \tau_1^3 \theta_1$, d'où la formule

$$\sum_{h \geq 0} 1 \left[\frac{4N - 1 - (4h + 3)}{4} \right] \Phi(4h + 3) = \frac{1}{16} \sum \mu^2,$$

la somme s'étendant, au second membre, aux classes propres de discriminant $4N - 1$, et μ désignant le minimum pair d'une telle classe.

On n'oubliera pas que $H(0) = \frac{1}{4}$.

Indiquons maintenant une voie différente pour obtenir des relations analogues.

69. Définition de la fonction $\varepsilon(q)$. — Nous désignerons par $\varepsilon(q)$, ou plus simplement ε , le terme constant dans le développement trigonométrique de

$$\gamma_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Theta_1 \Pi_1^2 \Pi^2}{\Theta^3}.$$

On peut évaluer ε de diverses manières.

En premier lieu, partons des développements

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^3} &= 8 \sum_1 \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx, \\ \gamma_1 \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta} &= 4 \sum_1 q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx; \end{aligned}$$

en multipliant membre à membre et égalant les termes constants, on trouve

$$\varepsilon = 16 \sum_1 m^2 \frac{q^{m^2+m}}{1 - q^{2m}} \left[q^{-\frac{1}{4}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right],$$

ε est donc de la forme

$$(72) \quad \varepsilon = \sum_0 q^{2N - \frac{1}{4}} \alpha_N,$$

et, si l'on pose

$$(73) \quad \begin{aligned} 8N - 1 &= 4m^2 + 4m + 8\mu - (2\mu - 1)^2 \\ (m \geq 1, \quad \mu &\geq 0, \quad 0 < \mu \leq m), \end{aligned}$$

$$\alpha_N = 16 \sum m^2,$$

la somme s'étendant aux solutions indiquées, m , μ , de (73). En écrivant (73)

$$8N - 1 = (2m + 2\mu - 2\mu + 2)(2m + 2\mu + 2\mu) - (2\mu + 1)^2 = ac - b^2,$$

et faisant correspondre à la solution m , μ , la forme (a, b, c) posi-

tive, impropre, et de discriminant $8N-1$, on reconnaît, par la marche déjà si souvent suivie, qu'on a

$$(74) \quad z_N = \frac{1}{2} \sum (\mu_1^2 + \mu_2^2),$$

μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leq \mu_2$) étant les deux minima $\equiv 0 \pmod{4}$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

70. *Seconde évaluation de z_N .* — En opérant de même sur les deux développements (nos 5 et 4) :

$$\begin{aligned} \tau_1^2 \theta_1 \theta \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta^2} &= 8 \sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx, \\ \tau_1 \theta_1 \theta \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^2} &= 4 \sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2} a_m \sin 2mx, \end{aligned}$$

(voir n° 37), on trouve :

$$z = 16 \sum_1 (-1)^{m+1} m \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}} \left[q^{-\frac{1}{2}} - \dots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \right].$$

On est ainsi conduit, pour calculer z_N , à poser

$$8N-1 = 4m^2 + 4m + 8m\varphi - (2\mu-1)^2, \quad (m \geq 1, \varphi \geq 0, 0 < \mu < m),$$

d'où

$$z_N = 16 \sum m(2\mu-1)(-1)^{m+\varphi+\mu}.$$

En introduisant la même forme (a, b, c) que ci-dessus, on trouve

$$(75) \quad z_N = \sum (2\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_1 - \mu_1\mu_2),$$

μ_1, μ_2 étant les minima $\equiv 0 \pmod{4}$, ($\mu_1 \leq \mu_2$) et μ le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

71. La comparaison des deux valeurs de z_N conduit à la relation

suivante :

$$(76) \quad \sum (\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1\mu_2 - 4\mu_1\mu_2) = 0;$$

la somme s'étendant à toutes les classes impropres d'un discriminant donné, $8N - 1$; μ_1 , μ_2 et μ ont les significations qui viennent d'être indiquées.

La relation (76), qui semble nouvelle, ne paraît pas facilement démontrable par voie élémentaire.

Exemple. — Soit $8N - 1 = 15$; il y a deux classes impropres $(2, 1, 8)$ et $(4, 1, 4)$, pour lesquelles μ_1 , μ_2 , μ ont les valeurs respectives

$$8, 8, 2 \quad \text{et} \quad 4, 4, 6;$$

et l'on a bien

$$(8^2 + 8^2 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 - 4 \cdot 6 \cdot 4) + (4^2 + 4^2 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 16) = 0.$$

72. Troisième évaluation de α_N . — Il faut partir des relations [nos 5 et 8, (5)]

$$\gamma_{11}^2 \theta_1 \frac{H_1^2 H_1}{\Theta^2} = 4 \theta_1 H_1 - 8 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (q^{-1} + \dots + m q^{-m^2}) \cos(2m+1)x,$$

$$\gamma_{11} \theta_1 \theta_1^2 \frac{H_1 \theta_1}{\Theta^2} = 4 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}} \cos(2m+1)x;$$

et faire encore le produit membre à membre. On obtient ainsi, pour ε , la somme des deux expressions

$$16 \theta_1 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}}$$

et

$$(77) \quad -16 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}} (q^{-1} + \dots + m q^{-m^2}).$$

Cherchons le coefficient de $q^{\frac{A+3}{2}}$ dans la première.

En vertu de l'expression de \mathfrak{B} (p. 350), ce sera

$$(78) \quad 16 \sum (2m+1) F[4k+3-(2m+1)^2-2(2m+1)-(2m+1)\varepsilon],$$

m étant entier positif, ε entier positif ou nul, et la somme s'étendant à toutes les valeurs de m, ε qui ne rendent pas négative la quantité sur laquelle porte F .

La quantité (78), que nous désignerons par β_k , s'écrit évidemment

$$\beta_k = 16 \sum_{h \geq 0} F[4k+3-(4h+3)] \psi(4h+3),$$

$\psi(n)$ désignant, comme au n° 39, la somme des diviseurs de n inférieurs à \sqrt{n} .

Il faut maintenant développer de même la quantité (77) suivant les puissances de q ; cette quantité est évidemment du type

$$\sum_{k=0} q^{k+\frac{3}{4}} \gamma_k;$$

on calcule γ_k par nos méthodes ordinaires, et l'on trouve ainsi :

$$1^\circ \quad k \text{ impair} \dots \dots \dots \gamma_k = \sum \mu(\mu_2 - \mu_1)$$

$$2^\circ \quad k \text{ pair} \dots \dots \dots \gamma_k = 2 \sum \nu_2(\nu_3 - \nu_1)$$

μ_1, μ_2 désignant les minima $\equiv 0 \pmod{4}$ et μ le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ (k impair); ν_1, ν_2, ν_3 ($\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$) les minima d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ (k pair).

On obtient ainsi une nouvelle expression du coefficient de $q^{k+\frac{3}{4}}$ dans ε ; c'est $\beta_k + \gamma_k$.

1° Soit k pair; $k + \frac{3}{4}$ est du type $2k' + 1 - \frac{1}{4}$; comme il n'y a pas de tels termes dans ε , il reste $\beta_k + \gamma_k = 0$, c'est-à-dire, en faisant

$$k = 2M,$$

$$8 \sum_{h \leq 0} F[8M + 3 - (4h + 3)] \psi(4h + 3) = \sum \nu_2(\nu_3 - \nu_1);$$

la dernière somme porte sur les classes impropres de discriminant $8M + 3$, et ν_1, ν_2, ν_3 désignent les trois minima d'une quelconque de ces classes ($\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$).

2° Soit k impair; $k = 2N - 1$; on trouve, en égalant $\beta_k + \gamma_k$ à la valeur (75) de z_N ,

$$8 \sum_{h \leq 0} F[8N - 1 - (4h + 3)] \psi(4h + 3) = \sum \mu_1(\mu_2 - \mu),$$

μ_1, μ_2 étant les deux minima $\equiv 0 \pmod{4}$ et μ le minimum $\equiv 2 \pmod{4}$ d'une classe improprie quelconque de discriminant $8N - 1$, ($\mu_1 \leq \mu_2$).

73. Quatrième évaluation de z_N . — On partira des formules :

$$\eta_1^3 \theta_1^2 \theta \frac{\Pi^2 \Pi_1}{\Theta^4} = -2 \sum_0 (2m + 1)^2 \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1 + q^{2m+1}} \cos(2m + 1)x + \frac{1}{2} \eta_1 \theta_1^3 \theta \frac{\Pi_1}{\Theta},$$

$$\theta \frac{\Pi_1 \Theta_1}{\Theta} = -2 \sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} [1 - 2q^{-1} + \dots + 2(-1)^m q^{-m^2}] \cos(2m + 1)x;$$

une suite de calculs analogues conduira aux deux relations ci-dessous, où les notations du numéro précédent sont conservées et où $\varphi(n)$ désigne la somme des diviseurs *impairs* de n :

$$32 \sum_{h \leq 0} F(8N - 1 - 4h) [2(-1)^{h+1} - 1] \varphi(h) = \sum (\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu^2),$$

$$32 \sum_{h \leq 0} F(8M + 3 - 4h) [2(-1)^h + 1] \varphi(h) = \sum (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2).$$

On fera $\varphi(0) = \frac{1}{24}$ et l'on ne comptera que pour $\frac{1}{3}$ la classe $(2a, a, 2a)$.

74. En introduisant de même le terme en $\cos x$ du développement

trigonométrique de

$$\gamma_1^2 \theta_1^3 \theta^2 \frac{\mathbf{H}_1 \theta_1^2 \mathbf{H}^2}{\theta^4},$$

on arriverait à des résultats dont nous ne citerons ici qu'un seul,

$$\begin{aligned} & 8 \sum_{h \geq 0} \mathbf{F}[4\mathbf{N} - (4h + 1)] \psi(4h + 1) \\ &= \sum m_1(m_1 + m_2 - m) \left[1 - (-1)^{\frac{m}{4}} \right], \end{aligned}$$

la dernière somme s'étendant aux classes propres de discriminant $4\mathbf{N}$, m_1, m_2 étant les deux minima impairs ($m_1 < m_2$), m le minimum pair d'une telle classe.

Enfin $\psi(4h + 1)$ a le sens précis indiqué au n° 39; c'est, si $4h + 1$ non carré, la somme des diviseurs du nombre $4h + 1$ *inférieurs* à sa racine carrée; si $4h + 1 = \delta^2$, c'est cette même somme augmentée de $\frac{1}{2}\delta$.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE I.

FORMULES DÉDUITES DES DÉVELOPPEMENTS FONDAMENTAUX.

73. Rappelons d'abord les relations suivantes, qui appartiennent à la transformation du troisième ordre des fonctions θ (1) :

$$-C \mathbf{H}(3x, q^3) = \mathbf{H}(x) \mathbf{H}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \mathbf{H}\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

(1) Voir, par exemple, WEBER, *Elliptische Functionen*, § 28.

$$C H_1(3x, q^3) = H_1(x) H_1\left(x - \frac{\pi}{3}\right) H_1\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C \Theta(3x, q^3) = \Theta(x) \Theta\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Theta\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C \Theta_1(3x, q^3) = \Theta_1(x) \Theta_1\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Theta_1\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

la constante C ayant pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{3}\eta_1\theta_1\theta_1' : H\left(\frac{\pi}{3}\right)$; on a d'ailleurs directement pour $H\left(\frac{\pi}{3}\right)$ la valeur $\sqrt{3}\eta_1(q^3)$, en désignant par $\eta(q)$, avec M. Weber, la fonction

$$\eta(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{3m^2+m+\frac{1}{12}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

On conclut immédiatement des relations précédentes

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\eta(q^3), \\ H_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta(q^3) \frac{\sqrt{\theta_1}}{\sqrt{\theta(q^3)}\theta_1(q^3)}, \\ \Theta\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta_1(q^3) \frac{\sqrt{\eta_1\theta_1}}{\sqrt{\eta_1(q^3)}\theta_1(q^3)}, \\ \Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta_1(q^3) \frac{\sqrt{\eta_1\theta_1'}}{\sqrt{\eta_1(q^3)}\theta_1(q^3)}. \end{array} \right.$$

76. LEMME. — Faisons $x = \frac{\pi}{3}$ dans le développement classique

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \frac{H^2}{\Theta^2} = 8 \sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - 8 \sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}} \cos 2mx;$$

il vient, en vertu de (79),

$$(80) \quad 3\eta_1\theta_1\eta_1(q^3)\theta_1(q^3) = 8 \sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}} \left(1 - \cos \frac{2m\pi}{3}\right).$$

D'ailleurs (n° 14),

$$\eta_1\theta_1 = \frac{1}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right), \quad \eta_1(q^3)\theta_1(q^3) = \frac{1}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right);$$

quant à $\cos \frac{2m\pi}{3}$, c'est 1, si $m \equiv 0 \pmod{3}$, et $-\frac{1}{2}$ dans tout autre cas.

Si maintenant on égale les coefficients de q^x dans les deux membres de (80), on obtient immédiatement ce théorème :

Le nombre des décompositions de $8N$ selon la formule

$$8N = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 3(2z + 1)^2 + 3(2t + 1)^2,$$

où x, y, z, t sont entiers, positifs, nuls ou négatifs, est égal à seize fois la somme des diviseurs de N dont les conjugués sont impairs et qui ne sont pas multiples de 3.

77. Relations déduites de la formule fondamentale (10). —

Dans cette formule (10), qui s'écrit

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 \theta_1 \Pi_1 \Theta_1 \frac{\Pi^2}{\Theta^2} &= 2 \Pi_1(x, \sqrt{q}) \sum_0^{\frac{8y+7}{8}} q^{\frac{8y+7}{8}} F(8y+7) - 4 \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{8}} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \\ &\times \left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \dots \right] \cos(2m+1)x, \end{aligned} \right.$$

faisons $x = \frac{\pi}{3}$. Le premier membre, en vertu de (79), est

$$3 \eta_1(q^3) \theta_1(q^3) \Pi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) \Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ou, d'après le n° 14,

$$\frac{3}{2} \eta_1^2(q^3) \frac{1}{2} \eta_1(\sqrt{q}) \Pi_1\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{q}\right),$$

c'est-à-dire

$$(81) \quad \frac{3}{4} \eta_1^2(q^3) \eta_1(q^2) \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Le second membre est

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} &2 \sum_0^{\frac{8y+7}{8}} q^{\frac{8y+7}{8}} F(8y+7) \times \sum_x^{\frac{(2m+1)^2}{8}} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} \\ &- 4 \sum_1^{\frac{(2m+1)^2}{8}} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \dots \right] \cos(2m+1)\frac{\pi}{3}. \end{aligned} \right.$$

Égalons les coefficients de q^N dans les deux expressions (81) et (82).

Dans (81), on doit poser

$$(83) \quad 8N = 3(2z+1)^2 + 3(2t+1)^2 + (2y+1)^2 + (2m+1)^2 \\ (z, t, y, m \geq 0)$$

et prendre la somme

$$(84) \quad \frac{3}{4} \sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3},$$

étendue à toutes les décompositions (83) de $8N$.

Or :

1° Si $N \equiv 0 \pmod{3}$, $2y+1$ et $2m+1$, dans (83), sont $\equiv 0 \pmod{3}$; donc $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est -1 , et la somme (84), c'est-à-dire le coefficient de q^N dans (81), est $-\frac{3}{8}\mathfrak{N}$, où \mathfrak{N} désigne le nombre des représentations (83), nombre calculé d'une manière générale au n° 76.

2° Si $N \equiv -1 \pmod{3}$, l'un des entiers $2y+1$, $2m+1$ est $\equiv 0 \pmod{3}$, l'autre $\equiv \pm 1 \pmod{3}$; d'ailleurs, on a évidemment

$$\frac{3}{4} \sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = \frac{3}{8} \sum \left[\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} + \cos(2y+1)\frac{\pi}{3} \right],$$

et comme, au second membre, un des cosinus est -1 , l'autre $+\frac{1}{2}$, la somme (84) est égale à $-\frac{3}{16}\mathfrak{N}$.

3° Si $N \equiv +1 \pmod{3}$, comme $2y+1$ et $2m+1$ sont tous deux $\equiv \pm 1 \pmod{3}$, $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est $\frac{1}{2}$, et la somme (84) est $\frac{3}{8}\mathfrak{N}$.

Cherchons maintenant le coefficient de q^N dans (82).

Dans la première ligne de (82), c'est évidemment

$$2 \sum_{m \geq 0} F[8N - (2m+1)^2] \cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Dans la seconde ligne, il faut poser

$$(85) \quad 8N = (2m+1)^2 - (2\mu-1)^2, \quad m, \mu \geq 1, \quad \mu < m,$$

m et μ étant de plus de même parité, et prendre la somme

$$-4 \sum (2\mu - 1) \cos(2m + 1) \frac{\pi}{3}.$$

Or on écrit (85)

$$2N = (m - \mu + 1)(m + \mu) = \delta\delta_1,$$

δ_1 , c'est-à-dire $m + \mu$, étant pair, et δ , ou $m - \mu + 1$, impair, puisque m et μ sont de même parité; de plus $\delta < \delta_1$. On en conclut immédiatement que, dans la seconde ligne de (82), le coefficient cherché est

$$-4 \sum (\delta_1 - \delta) \cos(\delta_1 + \delta) \frac{\pi}{3},$$

la somme s'étendant aux décompositions, déjà rencontrées au n° 56,

$$2N = \delta\delta_1, \quad \delta_1 \text{ pair, } \delta \text{ impair,} \quad \delta < \delta_1.$$

Il ne reste plus qu'à égaler les deux valeurs trouvées pour le coefficient considéré.

Auparavant, faisons $x = 0$ dans (10), et égalons, dans les deux membres, les coefficients de q^N ; nous trouvons immédiatement la formule

$$(86) \quad 0 = \sum_{m \geq 0} F[8N - (2m + 1)^2] - 2 \sum (\delta_1 - \delta),$$

la dernière somme s'étendant aux mêmes décompositions $2N = \delta\delta_1$ que ci-dessus.

78. Formules finales. — Maintenant, égalons les valeurs obtenues pour le coefficient de q^N dans (81) et (82).

1° $N \equiv -1 \pmod{3}$. On a (n° 76) $\mathfrak{N} = 16 \sum d'$, d' étant un diviseur quelconque de N à conjugué impair; et, par suite,

$$- \frac{3}{16} 16 \sum_{m \geq 0} F[8N - (2m + 1)^2] \cos(2m + 1) \frac{\pi}{3} - 4 \sum (\delta_1 - \delta) \cos(\delta_1 + \delta) \frac{\pi}{3}.$$

Quand on pose $2N = \delta\delta_i$, d'où $\delta\delta_i \equiv 1 \pmod{3}$, on voit que δ_i et δ sont simultanément $\equiv +1$ ou $\equiv -1 \pmod{3}$; l'un étant pair, l'autre impair, $\delta_i + \delta$ est impair et $\equiv \pm 2 \pmod{3}$, c'est-à-dire que $\delta_i + \delta$ est $6h+1$ ou $6h+5$; donc

$$\cos(\delta_i + \delta) \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi

$$-3 \sum_{m \leq 0} d' = 2 \sum_{m \leq 0} F[8N - (2m+1)^2] \cos(2m+1) \frac{\pi}{3} - 2 \sum (\delta_i - \delta).$$

Combinant avec (86), et observant encore que $\cos[(2m+1)\pi/3]$ est -1 , si $2m+1 \equiv 0 \pmod{3}$, et $\frac{1}{2}$ en tout autre cas, on obtient les deux formules

$$\left. \begin{aligned} (87) \quad \sum_{\mu \leq 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] &= \sum d' \\ (88) \quad \sum_{\rho \leq 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] &= - \sum d' + 2 \sum (\delta_i - \delta) \end{aligned} \right\} N \equiv -1 \pmod{3},$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta\delta_i$ où $\delta_i > \delta$, δ_i pair, δ impair.

2° $N \equiv +1 \pmod{3}$. On a de même

$$6 \sum_{m \leq 0} d' = 2 \sum_{m \leq 0} F[8N - (2m+1)^2] \cos(2m+1) \frac{\pi}{3} - 4 \sum (\delta_i - \delta) \cos(\delta_i + \delta) \frac{\pi}{3}.$$

Ici, par $2N = \delta\delta_i$, la somme $\delta_i + \delta$ est impaire et $\equiv 0 \pmod{3}$; donc $\cos[(\delta_i + \delta)\pi/3]$ est -1 , et l'on trouve, en combinant avec (86),

$$\left. \begin{aligned} (89) \quad \sum_{\rho \leq 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] &= -2 \sum d' \\ (90) \quad \sum_{\mu \leq 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] &= -2 \sum d' + 2 \sum (\delta_i - \delta) \end{aligned} \right\} N \equiv +1 \pmod{3},$$

d' , δ , δ_i ayant même signification que ci-dessus.

3° $N \equiv 0 \pmod{3}$. On a

$$-12 \sum_{\substack{d'' \\ m \equiv 0}} d'' = 2 \sum F[8N - (2m+1)^2] \cos(2m+1) \frac{\pi}{3} - 4 \sum (\delta_1 - \delta) \cos(\delta_1 + \delta) \frac{\pi}{3},$$

d'' désignant (n° 76) tout diviseur de N non multiple de 3 et à conjugué impair.

Ici (à moins que N ne soit pas divisible par 9), $\cos(\delta_1 + \delta) \frac{\pi}{3}$ n'a pas une valeur fixe; on peut écrire, d'ailleurs,

$$\cos(\delta_1 + \delta) \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\delta_1 + \delta}{3} \right)^2,$$

le symbole de Jacobi, $\left(\frac{\delta_1 + \delta}{3} \right)$, étant nul si $\delta_1 + \delta \equiv 0 \pmod{3}$.

La combinaison avec (86) donne

$$\left. \begin{aligned} (91) \quad \sum_{\substack{d'' \\ \mu \equiv 0}} F[8N - (6\varphi \pm 1)^2] &= -4 \sum d'' + 2 \sum (\delta_1 - \delta) \left(\frac{\delta_1 + \delta}{3} \right)^2 \\ (92) \quad \sum_{\substack{d'' \\ \mu \equiv 0}} F[8N - 9(2\mu + 1)^2] &= -4 \sum d'' + 2 \sum (\delta_1 - \delta) \left[1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta}{3} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} N \equiv 0 \pmod{3},$$

d'' désigne tout diviseur de N non multiple de 3 et à conjugué impair; δ_1 et δ ont la même signification que plus haut.

79. Remarque. — Si N , multiple de 3, ne l'est pas de 9, le symbole de Jacobi qui figure dans les deux dernières formules est égal à ± 1 ; si, de plus, on observe que $4 \sum d'' = \sum d$, d désignant tout diviseur de N à conjugué impair, on voit que les formules (92) et (91) coïncident avec (87) et (88).

Ainsi, pour $N \equiv 0 \pmod{3}$, et non $\equiv 0 \pmod{9}$, les formules (87) et (88) subsistent.

80. Formules complémentaires. — On peut, par voie élémentaire, obtenir des formules analogues aux précédentes, et dans lesquelles $8N + 4$ remplacerait $8N$. On part, pour cela, de la relation

d'Hermite (n^o 8) :

$$r_1^3(\sqrt{q}) = 8 \sum_0 q^{\frac{8\nu+3}{8}} F(8\nu+3);$$

et l'on multiplie les deux membres par $H_1\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{q}\right)$; on égale ensuite, dans les deux nouveaux membres, les coefficients de $q^{\frac{1}{2}(2N+1)}$. Calculons ceux-ci.

Au premier membre, il faut poser

$$(93) \quad \begin{cases} 8N+4 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + (2t+1)^2, \\ (x, y, z, t \geq 0) \end{cases}$$

et prendre $\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3}$ étendu aux représentations (93).

Au second membre, on a, pour le coefficient cherché,

$$8 \sum_{m \geq 0} F[8N+4 - (2m+1)^2] \cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Distinguons maintenant divers cas.

1^o $N \equiv -1 \pmod{3}$. Alors, dans le second membre de (93), deux des quantités au carré sont $\equiv 0 \pmod{3}$, les deux autres sont $\equiv \pm 1$; dès lors, on a

$$\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \sum \left[\cos(2x+1)\frac{\pi}{3} + \dots + \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} \right] = \sum \frac{1}{4} \left(-1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right);$$

c'est-à-dire que cette somme est $-\mathfrak{N}/4$, \mathfrak{N} désignant le nombre des représentations (93), qui est égal, comme on sait, à 16 fois la somme des diviseurs de $2N+1$.

On a donc

$$8 \sum_{m=0} F[8N+4 - (2m+1)^2] \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = -4\Phi(2N+1).$$

Mais, si l'on avait multiplié les deux membres de la relation d'Her-

mite par $H_1(0, \sqrt{q})$, on aurait trouvé de même

$$(94) \quad 8 \sum_{m \geq 0} F[8N + 4 - (2m + 1)^2] = 16\Phi(2N + 1),$$

formule valable quel que soit N. En combinant les deux dernières relations, on trouve

$$\left. \begin{aligned} (95) \quad & \sum_{\mu \geq 0} F[8N + 4 - 9(2\mu + 1)^2] = \Phi(2N + 1) \\ (96) \quad & \sum_{\rho \geq 0} F[8N + 4 - (6\rho \pm 1)^2] = \Phi(2N + 1) \end{aligned} \right\} N \equiv -1 \pmod{3},$$

$\Phi(n)$ désignant la somme des diviseurs de n .

2° $N \equiv 1 \pmod{3}$. En ce cas, $8N + 4 \equiv 0 \pmod{3}$; supposons que $8N + 4$ ne soit pas multiple de 9⁽¹⁾, on trouve

$$\left. \begin{aligned} (97) \quad & 2 \sum_{\mu \geq 0} F[8N + 4 - 9(2\mu + 1)^2] = \Phi(2N + 1) \\ (98) \quad & 2 \sum_{\rho \geq 0} F[8N + 4 - (6\rho \pm 1)^2] = 3\Phi(2N + 1) \end{aligned} \right\} N \equiv +1 \pmod{3}.$$

3° $N \equiv 0 \pmod{3}$. Le nombre $8N + 4$ étant $\equiv 1 \pmod{3}$, les décompositions (93) sont des deux types :

$$(99) \quad 8N + 4 = 9(2x' + 1)^2 + 9(2y' + 1)^2 + 9(2z' + 1)^2 + (2l' + 1)^2,$$

$$(100) \quad 8N + 4 = (2x'' + 1)^2 + (2y'' + 1)^2 + (2z'' + 1)^2 + (2l'' + 1)^2,$$

les carrés non précédés du facteur 9 n'étant pas multiples de 3.

Soient \mathfrak{K}' et \mathfrak{K}'' les nombres des décompositions (99) et (100); on a

$$\begin{aligned} \sum \cos(2l + 1) \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{4} \sum' \left[3(2x' + 1) \frac{\pi}{3} + \dots + (2l' + 1) \frac{\pi}{3} \right] + \sum'' \cos(2l'' + 1) \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{4} \sum' \left(-1 - 1 - 1 + \frac{1}{2} \right) + \sum'' \frac{1}{2} = -\frac{5}{8} \mathfrak{K}' + \frac{1}{2} \mathfrak{K}''. \end{aligned}$$

(1) Si $8N + 4 \equiv 0 \pmod{9}$, on obtient aisément les formules correspondantes.

Par suite

$$8 \sum_{m \geq 0} F[8N+4-(2m+1)^2] \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = -\frac{5}{8}\mathfrak{K}' + \frac{1}{2}\mathfrak{K}''.$$

En combinant avec (94), et observant que $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ est égal à $16\Phi(2N+1)$, on trouve

$$(101) \quad 24 \sum_{\mu \geq 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \frac{9}{4}\mathfrak{K}', \quad N \equiv 0 \pmod{3}.$$

D'ailleurs, *a priori*, \mathfrak{K}' n'est pas connu explicitement.

Cette formule, bien qu'ainsi incomplète, nous sera utile plus loin (n° 86).

Nous allons passer maintenant aux applications de la formule fondamentale (9).

81. Lemme. — Dans la relation bien connue

$$\theta^2 \theta_1^2 \frac{\Pi^2}{\Pi_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 8 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} m q^{2\mu}}{1 - q^{2\mu}} (1 - \cos 2\mu x),$$

faisons $x = \frac{\pi}{3}$; nous arrivons, en imitant la marche suivie au n° 76, à cette proposition qui, d'ailleurs, n'est pas nouvelle :

Le nombre des représentations de N par la forme

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

est égal à

$$4(-1)^N \sum d(-1)^d \left(\frac{d}{3}\right)^2,$$

la somme s'étendant à *tous* les diviseurs d , de N , et le *symbole de Jacobi*, $\left(\frac{d}{3}\right)$, étant nul, si $d \equiv 0 \pmod{3}$, selon une convention classique.

82. — *Relations déduites de la formule fondamentale (9).* —

Prenons la relation, déduite de (9) par changement de x en $x + \frac{\pi}{2}$,

$$(9') \left\{ \begin{aligned} \theta_1 \frac{\theta_1^2 \Theta_1 \Theta}{\theta_1^2} &= \frac{1}{\cos^2 x} + 4 \Theta(2x, q^2) \sum_0 (-1)^v q^{2v} J(v) \\ &\quad - 8 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} [-2q^{-2} + \dots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}] \cos 4mx \\ &\quad + 8 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \dots + (-1)^{m-1} (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right] \cos (4m+2)x. \end{aligned} \right.$$

et faisons-y successivement $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$; égalons ensuite, dans les deux membres, les coefficients de q^{2N} ($N > 0$).

Il vient, pour $x = 0$,

$$0 = 4 \sum_{m < 0} (-1)^N J(N - m^2) - 8 \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \delta);$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $N = \delta\delta_i$, où $\delta \geq \delta_i$. Nous poserons, dans ce qui suit,

$$(102) \quad U(N) = \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \delta);$$

de sorte que l'on a

$$(103) \quad \sum_{m < 0} J(N - m^2) = 2(-1)^N U(N).$$

Faisons maintenant $x = \frac{\pi}{3}$ dans (9'); le premier membre, en vertu de (79), est

$$3\theta_1(q^3)\theta(q^3)\Theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

c'est-à-dire, (n° 14),

$$(104) \quad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2)\Theta\left(\frac{2\pi}{3}, q^2\right) \quad \text{ou} \quad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2) \sum_{-\infty} (-1)^m q^{2m^2} e^{\frac{4m\pi}{3}}.$$

Le coefficient de q^{2N} dans (104) s'obtient comme il suit :

Posons

$$(105) \quad \begin{cases} 2N = 6x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 2m^2 \\ \text{c'est-à-dire} \\ N = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + m^2, \end{cases}$$

le coefficient cherché sera

$$(106) \quad 3 \sum (-1)^{r+y+z+m} e^{\frac{im\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad 3(-1)^N \sum e^{\frac{im\pi}{3}},$$

quantité évidemment réelle, et dont la valeur dépend de la valeur de $N \pmod{3}$.

1° $N \equiv -1 \pmod{3}$. — Alors, dans (105), $m \equiv \pm 1 \pmod{3}$, et la partie réelle de $e^{\frac{im\pi}{3}}$, c'est-à-dire $\cos(\frac{1}{3}m\pi)$ est $-\frac{1}{2}$; l'expression (106) est donc

$$-\frac{3}{2}(-1)^N \mathfrak{N},$$

\mathfrak{N} désignant ici le nombre des décompositions (105), c'est-à-dire, en vertu du n° 81,

$$(106') \quad -\frac{3}{2} 4 \sum (-1)^d d,$$

la somme s'étendant aux diviseurs de N .

2° $N \equiv +1 \pmod{3}$. — Dans (105), une des quantités z, m est $\equiv \pm 1$, l'autre $\equiv 0 \pmod{3}$; dès lors

$$3(-1)^N \sum e^{\frac{im\pi}{3}} = \frac{3}{2}(-1)^N \sum \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(-1)^N \mathfrak{N},$$

de sorte que la valeur de l'expression (106) est

$$(106'') \quad \frac{3}{4} 4 \sum (-1)^d d.$$

3° $N \equiv 0 \pmod{3}$. — Dans (105), $m \equiv 0 \pmod{3}$; la valeur de

l'expression (106) est donc $3(-1)^s \mathfrak{N}$ ou (n° 84)

$$(106'') \quad 3.4 \sum (-1)^d d \left(\frac{d}{3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

somme étendue aux diviseurs de N .

Il faut maintenant calculer de même le coefficient de q^N au second membre de (9'), après qu'on y a fait $x = \frac{\pi}{3}$.

On trouve, sans difficulté,

$$(107) \quad \begin{cases} 4(-1)^s \sum_{m \neq 0} J(N - m^2) e^{\frac{4m\pi}{3}} \\ - 8 \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \delta) \cos \frac{2\pi}{3} (\delta_i + \delta), \end{cases}$$

la dernière somme s'étendant toujours aux décompositions

$$N = \delta \delta_i, \quad \delta \equiv \delta_i.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer (107) à (106'), (106''), (106'''), selon les trois cas distingués pour obtenir les formules cherchées.

85. Premières formules. — $1^\circ N \equiv -1 \pmod{3}$. — L'égalité de (107) et de (106') donne, si l'on observe que (107) est réel et que $\delta_i + \delta \equiv 0 \pmod{3}$,

$$4(-1)^s \sum_{m \neq 0} J(N - m^2) \cos \frac{4m\pi}{3} = -6 \sum d(-1)^d + 8 \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \delta).$$

La dernière somme est $U(N)$, par (102). Combinant avec (103), on trouve

$$(108) \quad \begin{cases} \sum_{\sigma \neq 0} J[N - (3\sigma \pm 1)^2] = (-1)^s \sum d(-1)^d, \\ \sum_{\nu \neq 0} J(N - 9\nu^2) = -(-1)^s \sum d(-1)^d + 2(-1)^s U(N); \end{cases}$$

d désigne un diviseur quelconque de N .

2° $N \equiv +1 \pmod{3}$. — On a, en égalant (107) et (106''), et combinant ensuite avec (103) :

$$(109) \quad \begin{cases} \sum_{\gamma \geq 0} J(N - 9\gamma^2) &= \frac{1}{2} (-1)^N \sum d(-1)^d, \\ \sum_{\sigma \geq 0} J[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{-1}{2} (-1)^N \sum d(-1)^d + 2(-1)^N U(N). \end{cases}$$

3° $N \equiv 0 \pmod{3}$. — On trouve de même

$$(110) \quad \begin{cases} (-1)^N \sum_{\sigma \geq 0} J[N - (3\sigma \pm 1)^2] \\ = -2 \sum (-1)^d d \left(\frac{d}{3}\right)^2 + 2 \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \hat{\gamma}) \left(\frac{\delta_i + \hat{\sigma}}{3}\right)^2; \end{cases}$$

et l'autre somme se déduira immédiatement de celle-là par (103). Si N n'est pas multiple de 9, on a $\left(\frac{\delta_i + \hat{\sigma}}{3}\right)^2 = 1$.

84. Formules complémentaires. — Partons de la relation de Kronecker :

$$\theta_i^2 = 12 \sum E(\gamma) q^\gamma,$$

où $E(\gamma) = F(\gamma) - F_i(\gamma)$, et multiplions les deux membres par θ_i . Nous trouvons, en égalant ensuite les coefficients de q^N , et utilisant le résultat classique sur le nombre de décompositions de N en quatre carrés,

$$(111) \quad 12 \sum_{m \geq 0} E(N - m^2) = 8[2 + (-1)^N] \varphi(N),$$

$\varphi(N)$ désignant la somme des diviseurs *impairs* de N .

Multiplions de même les deux membres de la relation de Kronecker par $\Theta_i\left(\frac{\pi}{3}\right)$, il vient

$$(112) \quad 12 \sum_{m \geq 0} E(N - m^2) \cos 2m \frac{\pi}{3} = \sum \cos \frac{2\pi t}{3},$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions

$$(113) \quad N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

1° $N \equiv -1 \pmod{3}$. — Dans (113), deux des x, y, z, t sont $\equiv 0$, les deux autres $\equiv \pm 1 \pmod{3}$; donc, dans (112),

$$\begin{aligned} \sum \cos \frac{2\pi t}{3} &= \frac{1}{4} \sum \left(\cos 2\pi \frac{x}{3} + \dots + \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) \\ &= \sum \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \sum \frac{1}{4} = \frac{1}{4} 8 [2 + (-1)^N] \varphi(N). \end{aligned}$$

Combinant alors (111) et (112), on trouve

$$(114) \quad \begin{cases} \sum_{y \geq 0} E(N - 9y^2) &= \frac{1}{3} [2 + (-1)^N] \varphi(N), \\ \sum_{\sigma \leq 0} E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{1}{3} [2 + (-1)^N] \varphi(N). \end{cases}$$

2° $N \equiv 0 \pmod{3}$ et *non* $\equiv 0 \pmod{9}$. — Dans (113), un seul des x, y, z, t est $\equiv 0 \pmod{3}$, et l'on trouve sans difficulté, en combinant (111) et (112),

$$(115) \quad \begin{cases} \sum E(N - 9y^2) &= \frac{1}{6} [2 + (-1)^N] \varphi(N), \\ \sum E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{1}{2} [2 + (-1)^N] \varphi(N). \end{cases}$$

3° $N \equiv 0 \pmod{9}$. — Dans (113), un seul des x, y, z, t est $\equiv 0 \pmod{3}$, ou tous le sont. Soient \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 les nombres respectifs de ces deux sortes de décompositions.

Le calcul de $\sum \cos \frac{2\pi t}{3}$ dans (112) donne

$$(12) \quad \sum E(N - m^2) \cos \frac{2\pi m}{3} = -\frac{1}{8} \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2.$$

d'où, à l'aide de (111),

$$(116) \quad \begin{cases} \sum E(N - 9\gamma^2) &= \frac{1}{18} \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{12} \mathfrak{R}_4, \\ \sum E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{1}{16} \mathfrak{R}_1. \end{cases}$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_4 = 8[2 + (-1)^N] \mathfrak{Z}(\mathbf{N}), \quad \mathfrak{R}_4 = 8[2 + (-1)^N] \mathfrak{Z}\left(\frac{\mathbf{N}}{9}\right).$$

4^e $N \equiv 1 \pmod{3}$. — Soient \mathfrak{R}_3 et \mathfrak{R}_6 les nombres des décompositions (113) dans lesquelles 3 ou 6 des x, y, z, t sont multiples de 3; en calculant $\sum \cos \frac{2\pi t}{3}$ dans (112), on trouve

$$12 \sum E(N - m^2) \cos \frac{2m\pi}{3} = \frac{5}{3} \mathfrak{R}_3 - \frac{1}{3} \mathfrak{R}_6,$$

d'où, par combinaison avec (111),

$$(117) \quad \begin{cases} \sum E(N - 9\gamma^2) &= \frac{1}{16} \mathfrak{R}_3, \\ \sum E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{3}{8} \mathfrak{R}_3 + \frac{3}{2} \mathfrak{R}_6. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_6 = 8[2 + (-1)^N] \mathfrak{Z}(\mathbf{N});$$

de plus, si N est pair, il est aisé d'établir, par voie élémentaire, que $\mathfrak{R}_6 = 2\mathfrak{R}_3$. En ce cas, on peut donc calculer \mathfrak{R}_3 et \mathfrak{R}_6 , c'est-à-dire les seconds membres des formules (117). Si N est impair, il ne semble y avoir aucune relation simple entre \mathfrak{R}_3 et \mathfrak{R}_6 .

8². *Formules définitives. Premier cas : $N \equiv 1 \pmod{3}$.* — En réunissant les quatre formules (108) et (114), on obtient les quatre

formules qui leur sont équivalentes :

$$4 \sum_{\sigma \geq 0} F[N - (3\sigma \pm 1)^2] = \sum d_p + 2 \sum d_i,$$

$$4 \sum F_i[N - (3\sigma \pm 1)^2] = \sum d_p - \frac{2}{3} [1 + 2(-1)^N] \sum d_i,$$

$$4 \sum_{\nu \leq 0} F(N - 9\nu^2) = - \sum d_p + 2 [1 + (-1)^N] \sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4 \sum F_i(N - 9\nu^2) = - \sum d_p - \frac{2}{3} [1 - (-1)^N] \sum d_i + 2(-1)^N U(N);$$

d_i et d_p désignent respectivement, *ici comme plus bas*, les diviseurs impairs et pairs de N ; et l'on a posé

$$U(N) = \sum (-1)^{\delta_i} (\delta_i - \delta),$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = \delta_i \delta$, avec $\delta \leq \delta_i$.

Deuxième cas : $N \equiv 0 \pmod{3}$ et $\text{non} \equiv 0 \pmod{9}$. — On trouve, par (110) et (115),

$$4 \sum_{\nu \leq 0} F(N - 9\nu^2) = \frac{1}{2} \sum d_p + \sum d_i,$$

$$4 \sum F_i(N - 9\nu^2) = \frac{1}{3} \sum d_p - \frac{1}{3} [1 + 2(-1)^N] \sum d_i,$$

$$4 \sum_{\sigma \geq 0} F[N - (3\sigma \pm 1)^2] = - \frac{1}{2} \sum d_p + [3 + 2(-1)^N] \sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4 \sum F_i[N - (3\sigma \pm 1)^2] = - \frac{1}{3} \sum d_p - \sum d_i + 2(-1)^N U(N).$$

Troisième cas : $N \equiv 0 \pmod{9}$. — Il faut combiner cette fois (110) et (116). Les formules sont un peu plus compliquées, et nous n'en

donnerons que deux :

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{\sigma=0} F[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= \frac{3}{2} [2 + (-1)^N] \left[\varphi(N) - \varphi\left(\frac{N}{9}\right) \right] \\
 &\quad - (-1)^N 2 \sum (-1)^d d \left(\frac{d}{3}\right)^2 \\
 &\quad + (-1)^N 2 \sum (-1)^{\delta_1} (\delta_1 - \delta) \left(\frac{\delta_1 + \delta}{3}\right)^2, \\
 4 \sum F_i[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= -\frac{1}{2} [2 + (-1)^N] \left[\varphi(N) - \varphi\left(\frac{N}{9}\right) \right] \\
 &\quad - (-1)^N 2 \sum (-1)^d d \left(\frac{d}{3}\right)^2 \\
 &\quad + (-1)^N 2 \sum (-1)^{\delta_1} (\delta_1 - \delta) \left(\frac{\delta_1 + \delta}{3}\right)^2;
 \end{aligned}$$

$\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de N ; d un diviseur quelconque de N ; δ_1 et δ sont des diviseurs conjugués de N , $N = \delta\delta_1$ et $\delta \leq \delta_1$. Enfin $\left(\frac{d}{3}\right)$ et $\left(\frac{\delta_1 + \delta}{3}\right)$ sont les symboles de Jacobi, nuls si leurs numérateurs sont multiples de 3.

Quatrième cas : $N \equiv 1 \pmod{3}$ et pair. — La combinaison de (109) et de (117), où \mathfrak{D}_3 et \mathfrak{D}_0 sont remplacées par leurs valeurs, donne les relations

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{\gamma=0} F(N - 9\gamma^2) &= \frac{1}{2} \sum d_p + \sum d_i, \\
 4 \sum F_i(N - 9\gamma^2) &= \frac{1}{2} \sum d_p - \sum d_i, \\
 4 \sum_{\sigma=0} F[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= -\frac{1}{2} \sum d_p + 5 \sum d_i + 2U(N), \\
 4 \sum F_i[N - (3\sigma \pm 1)^2] &= -\frac{1}{2} \sum d_p - \sum d_i + 2U(N).
 \end{aligned}$$

Ces formules coïncident avec celles du second cas, lorsque N est supposé pair dans celles-ci.

Cinquième cas : $N \equiv 1 \pmod{3}$ et *impair*. — Il ne paraît pas possible d'obtenir de relations analogues aux précédentes, parce que, dans (117), \mathfrak{K}_3 et \mathfrak{K}_9 sont inconnus. Bien entendu, les formules (109), en J, subsistent; nous verrons plus loin qu'on peut encore les compléter (n° 88).

86. Formules liées à la fonction modulaire du tétraèdre. — La multiplication complexe de la fonction modulaire du tétraèdre a conduit à des formules plus simples, mais moins étendues que les précédentes, et qui sont comprises dans celles-ci.

Ces formules, qu'on trouvera au Tome II (p. 234) des *Modulfunktionen* de MM. Klein et Fricke, sont relatives aux nombres de classes où le coefficient moyen est indifféremment pair et impair; elles donnent, dans les notations ci-dessus, les deux sommes *totales* :

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F(N - 9\gamma^2) + \sum F_1(N - 9\gamma^2) + \sum F_1[4N - 9(2\mu + 1)^2], \\ \sum F[N - (3\sigma \pm 1)^2] + \sum F_1[N - (3\sigma \pm 1)^2] + \sum F_1[4N - (6\tau \pm 1)^2]. \end{array} \right.$$

Or nos formules des n° 78, 80 et 83 donnent chacune des sommes *partielles* qui figurent dans ces expressions; il n'y a qu'un seul cas d'exception, celui de $N \equiv 1 \pmod{3}$ et *impair*, c'est-à-dire $N = 6M + 1$.

Voici comment on peut, dans ce cas, évaluer les deux sommes (118).

On a, en ajoutant membre à membre la première équation (117) et la première (109), et observant que N est impair,

$$2 \sum_{\gamma < 0} G(N - 9\gamma^2) = \frac{1}{16} \mathfrak{K}_3 + \frac{1}{3} \sum d,$$

G étant $F + F_1$, et d un diviseur quelconque de N .

On a ensuite, par (101), puisque $F_1(8h + 3) = \frac{1}{3} F(8h + 3)$, et que $4N \equiv 4 \pmod{8}$,

$$\sum_{\mu < 0} F_1[4N - 9(2\mu + 1)^2] = \frac{1}{34} \mathfrak{K}_5;$$

la première somme (118) est donc égale à

$$\frac{1}{32}(\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}') + \frac{1}{4} \sum d;$$

\mathfrak{K}_3 est le nombre des décompositions de N en quatre carrés dont trois sont multiples de 3; \mathfrak{K}' celui des décompositions de $4N$ en quatre carrés *impairs*, dont trois sont multiples de 3. Or il est bien facile d'établir, d'une manière élémentaire, que

$$\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}' = 8 \sum d;$$

et, dès lors, la première somme (118) a pour valeur $\frac{1}{2} \sum d$, c'est-à-dire moitié de la somme des diviseurs de N , ce qui est la formule donnée par MM. Klein et Fricke.

La seconde somme (118) s'évalue de même et se prête à la même vérification.

87. Remarque. — Les relations (103) et (111) donnent par combinaison :

$$2 \sum_{m \equiv 0} F(N - m^2) = (-1)^N U(N) + [2 + (-1)^N] \varphi(N),$$

$$2 \sum F_1(N - m^2) = (-1)^N U(N) - \frac{1}{3} [2 + (-1)^N] \varphi(N).$$

Ces relations reviennent aux formules I, II, IV et V de Kronecker ⁽¹⁾; la seconde est plus générale que la formule IV, en ce qu'elle ne suppose pas N impair.

Rappelons que $\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de N .

(1) Les formules I, II, V donnent $\sum F(N - m^2)$, selon qu'on suppose N multiple de 4, N impairément pair, N impair; IV donne $\sum G(N - m^2)$ pour N impair. Voir aussi la formule XI (n° 134) du *Report* de St. Smith.

88. Dernières formules. — On a évidemment, C_0 désignant une constante en x ,

$$\begin{aligned} C_0 H\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H(x) H\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 H_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H_1(x) H_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 \Theta\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta(x) \Theta\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 \Theta_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta_1(x) \Theta_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \end{aligned} \quad (q = e^{i\pi\tau}),$$

d'où l'on déduit, sans qu'il soit utile de déterminer C_0 ,

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) &= -i \frac{\sqrt{a_1 g_1}}{\sqrt{a_1 (q^{\frac{1}{3}}) g_1 (q^{\frac{1}{3}})}}, \\ \Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) &= -i \frac{\sqrt{a_1 g}}{\sqrt{a_1 (q^{\frac{1}{3}}) g (q^{\frac{1}{3}})}}, \\ H_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) &= -i \frac{\sqrt{g g_1}}{\sqrt{g (q^{\frac{1}{3}}) g_1 (q^{\frac{1}{3}})}}. \end{aligned}$$

1° Faisant $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans la formule (10), et imitant la marche suivie au n° 77, on arrive à la relation ci-dessous, où N désigne un entier quelconque $\equiv -1 \pmod{3}$:

$$(119) \quad \sum_{\substack{d' \mid N \\ d' \equiv 1 \pmod{3}}} F\left[\frac{8N - (6\delta \pm 1)^2}{9}\right] = -\sum d' + \frac{2}{3} \sum (\delta_1 - \delta),$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair; et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta_1^2 - \delta^2$, où $\delta < \delta_1$, δ_1 pair, δ impair. Naturellement, δ ne prend que les valeurs telles que $8N - (6\delta \pm 1)^2$ soit positif et multiple de 9. Cette formule se place à côté de la formule (88).

2° Si maintenant on fait $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans (9'), (n° 82), on trouve de

même, en désignant par N un entier quelconque $\equiv 1 \pmod{3}$,

$$(120) \quad \sum_{\sigma \equiv 0} J \left[\frac{N - (3\sigma \pm 1)^2}{9} \right] = (-1)^N \left[\frac{2}{3} U(N) - \frac{1}{3} \sum d_p + \frac{1}{2} \sum d_i \right],$$

les notations du n° 83 étant conservées.

D'ailleurs, on reconnaît immédiatement qu'on a

$$(121) \quad \sum_{\sigma \equiv 0} E \left[\frac{N - (3\sigma \pm 1)^2}{9} \right] = \frac{1}{4} \mathfrak{K}_3,$$

\mathfrak{K}_3 étant toujours le nombre de décompositions de N en quatre carrés, dont trois sont multiples de 3.

Donc, si N est pair, c'est-à-dire si N , qui est $3h+1$, est du type $6M+4$, \mathfrak{K}_3 est connu (n° 84, 4°), et la combinaison des formules (120) et (121) donne les relations :

$$4 \sum_{\sigma \equiv 0} F \left[\frac{6M+4 - (3\sigma \pm 1)^2}{9} \right] = \frac{2}{3} U(N) - \frac{1}{2} \sum d_p + \sum d_i,$$

$$4 \sum_{\sigma \equiv 0} F_i \left[\frac{6M+4 - (3\sigma \pm 1)^2}{9} \right] = \frac{2}{3} U(N) - \frac{1}{2} \sum d_p + \frac{1}{3} \sum d_i.$$

Si N est impair, on n'a pas de pareilles formules; toutefois, si l'on élimine \mathfrak{K}_3 entre (121) et la première équation (117), on obtient une relation entre les quatre sommes (où l'on a écrit h au lieu de $3\sigma \pm 1$) :

$$\sum F(N-9\gamma^2); \quad \sum F_i(N-9\gamma^2); \quad \sum F\left(\frac{N-h^2}{9}\right); \quad \sum F_i\left(\frac{N-h^2}{9}\right).$$

Ces sommes sont d'ailleurs liées par la première équation (109), et par (120); on peut donc de plusieurs manières former une relation qui ne contienne que deux d'entre elles; on a, par exemple,

$$4 \sum_{\gamma, \sigma \equiv 0} F(N-9\gamma^2) - 3F \left[\frac{N - (3\sigma \pm 1)^2}{9} \right] = 2\Phi(N) + 2U(N),$$

N étant du type $6M+1$, et $\Phi(N)$ étant la somme de ses diviseurs (*).

(*) On déduirait sans difficulté des relations de ce paragraphe la formule de

CHAPITRE II.

NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

89. *Développement de $\Pi_1 \Theta_1 \Pi : \Theta$.* — Dans les deux formules d'Hermite :

$$(122) \quad \begin{cases} \theta_1 \frac{\Pi \Theta_1}{\Theta} = 2 \sum_n q^{\frac{2m+1}{2}} [1 + 2q^{-1} + \dots + 2q^{-m}] \sin(2m+1)x, \\ \eta_1 \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta} = 4 \sum_n q^{m^2} \left(q^{-\frac{1}{2}} + \dots + q^{-\frac{2m-1}{2}} \right) \sin 2mx, \end{cases}$$

changeons x en $2x$, q en q^2 ; en vertu du n° 14, nous avons ainsi les développements de

$$\frac{1}{2} \Pi \Pi_1 \frac{\Theta_1^2 + \Theta^2}{\Theta \Theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \Pi \Pi_1 \frac{\Theta_1^2 - \Theta^2}{\Theta \Theta_1},$$

car, par les relations quadratiques entre les thêta,

$$\eta_1^2 (\Pi_1^2 - \Pi^2) = 2 \theta_1^2 (q^2) (\Theta_1^2 - \Theta^2).$$

Dès lors, par addition, on a le développement de $\Pi_1 \Theta_1 \Pi : \Theta$; c'est-à-dire qu'on l'obtient en ajoutant les seconds membres des relations (122), où x et q sont remplacés par $2x$ et q^2 .

Ainsi

$$(123) \quad \begin{cases} \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta} = 2 \sum_n q^{\frac{2m+1}{2}} (1 + 2q^{-2} + \dots + 2q^{-2m}) \sin(4m+2)x \\ \quad + 4 \sum_n q^{m^2} \left(q^{-\frac{1}{2}} + \dots + q^{-\frac{2m-1}{2}} \right) \sin 4mx. \end{cases}$$

MM. Klein-Fricke (*loc. cit.*) qui donne, dans la notation de ces géomètres, la somme $\sum \Pi \left(\frac{1}{9} \frac{N - k^2}{9} \right)$, lorsque $N \equiv 1 \pmod{3}$.

Cette formule a déjà été donnée par Biehler (*loc. cit.*, p. 31), qui l'établit directement.

90. *Développement de* $\Pi^2 \Pi_1^2 \Theta_1 : \Theta^2$. — On applique la méthode de Liouville (n° 3) en considérant simultanément

$$\eta_1 \Pi^2 \Pi_1^2 \Theta_1 : \Theta^2 \quad \text{et} \quad \eta_1 \Theta^2 \Theta_1^2 \Pi_1 : \Pi^2;$$

on trouve ainsi, sans difficulté,

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\Pi^2 \Pi_1^2 \Theta_1}{\Theta^2} &= \zeta \Theta_1(3x, q^3) + 2\Re \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} \cos(6m+2)x \\ &\quad - 4 \sum_1 q^{3m^2} \left[3q^{-\frac{3}{2}} + \dots + 3(2m-1)q^{-\frac{3(2m-1)^2}{2}} \right] \cos 6mx \\ &\quad - 4 \sum_1 q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} \left[3q^{-\frac{25}{12}} + \dots + (6m-1)q^{-\frac{(6m-1)^2}{12}} \right] \cos(6m+2)x \\ &\quad - 4 \sum_0 q^{\frac{(3m+2)^2}{3}} \left[q^{-\frac{1}{12}} + \dots + (6m+1)q^{-\frac{(6m+1)^2}{12}} \right] \cos(6m+4)x. \end{aligned}$$

ζ et \Re désignent des coefficients, jusqu'ici indéterminés, et dont la recherche est le point délicat de notre étude.

91. *Détermination de* ζ . — Multiplions membre à membre les deux développements (n° 5 et 89) :

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\Pi \Pi_1}{\Theta} &= 4 \sum_1 q^{m^2} \left(q^{\frac{1}{2}} + \dots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right) \sin 2mx, \\ \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta} &= 2 \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} (1 + 2q^{-2} + \dots + 2q^{-2m^2}) \sin(4m+2)x \\ &\quad + 2 \sum_1 q^{3m^2} \left(2q^{-\frac{1}{2}} + \dots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right) \sin 4mx, \end{aligned}$$

et égaux, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de

Fourier, les termes indépendants de x . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mathfrak{L} = & \sum_1 q^{em^2} \left(q^{-\frac{1}{4}} + \dots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{4}} \right) \left(2q^{-\frac{1}{2}} + \dots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right) \\ & + \sum_0 q^{\frac{3}{2}(3m+1)^2} \left(q^{-\frac{1}{4}} + \dots + q^{-\frac{(5m+1)^2}{4}} \right) (1 + 2q^{-2} + \dots + 2q^{-2m^2}). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \sum_0 q^{2N+1+\frac{1}{4}} \sigma_N,$$

σ_N étant un coefficient indépendant de q , on voit de suite, par l'expression précédente de \mathfrak{L} , que σ_N est le nombre des solutions entières x, y, z de l'équation

$$(124) \quad 8N+5 = 6x^2 - z^2 - 2y^2,$$

satisfaisant aux conditions

$$(125) \quad x > 0, \quad 0 \leq z \leq 2x-1, \quad -x+1 \leq y \leq x-1.$$

Enfin, observons, en vertu même de (124), que z est impair et que x et y sont de parités contraires.

Écrivons maintenant (124) de la manière suivante :

$$3(8N+5) = 3(3x+y-z)(3x+y+z) - 9(x+y)^2,$$

et faisons correspondre à la solution x, y, z la forme $(\alpha, 3\beta, 3\gamma)$:

$$\varphi = (3x+y-z)X^2 + 6(x+y)XY + 3(3x+y+z)Y^2;$$

d'où, pour α, β, γ , en utilisant aussi (125), les conditions

$$(126) \quad \begin{cases} \alpha > \beta > 0, & \gamma \geq \alpha, & \alpha + \gamma - 4\beta > 0, \\ \gamma - \alpha \equiv 0 \pmod{2}, & \gamma + \alpha - 2\beta \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

D'après cela, φ est une forme positive, de discriminant $3(8N+5)$.

Une seule *peut* être une forme φ . Car, si a n'est pas multiple de 3, une et une seule des quantités b , $a + b$, $2a + b$ est multiple de 3; une et une seule des formes φ_1 , φ_2 , φ_3 a donc son coefficient moyen $\equiv 0 \pmod{3}$, et le coefficient extrême l'est aussi, puisque le discriminant est multiple de 3.

Si $a \equiv 0 \pmod{3}$, φ_3 seule peut être une forme φ et ne peut l'être que dans ce cas.

2° $b < 0$ (1). — La réduite (a, b, c) a son point dans 1'; elle a une équivalente dans chacune des régions 2', 3', 4'; on reconnaît de suite qu'une seule des *quatre* formes *peut* être une forme φ .

Il faut maintenant examiner dans quels cas *la* forme, équivalente à la réduite (a, b, c) , qui *peut* être une forme φ , l'est effectivement; on arrive sans difficulté aux résultats qui suivent :

1° $c \equiv 0 \pmod{3}$, (d'où $b \equiv 0$). — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si } b > 0, \quad \text{quand on a } c \equiv 3a$$

et que a , c ne sont pas simultanément multiples de 4;

$$\text{si } b < 0, \quad \text{quand } c \equiv 0 \pmod{4}.$$

2° $a \equiv 0 \pmod{3}$, (d'où $b \equiv 0$). — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } b > 0, \quad a \equiv 0 \pmod{4}.$$

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } a + 2b + c \equiv 3a \quad \text{et} \quad c \equiv 0 \pmod{4}.$$

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ si a et c ne sont pas simultanément multiples de 4.

Ces quatre cas épuisent toutes les hypothèses possibles, à cause de

(1) $b = 0$ est impossible, la forme (a, b, c) étant impropre et de discriminant impair.

$ac - b^2 \equiv 0 \pmod{3}$; les conditions indiquées sont nécessaires et suffisantes.

On peut maintenant, et c'est cette idée qui va nous conduire au but, associer à la solution x, y, z de (124), au lieu de la forme φ , une forme $(\alpha', 3\beta', 3\gamma')$, ou ψ , définie par

$$\alpha' = 3x + y + z, \quad \beta' = x + y, \quad \gamma' = 3x + y - z,$$

ce qui revient à changer z en $-z$ dans les coefficients de φ .

Les coefficients de ψ , qui est une forme *impropre*, de discriminant $3(8N+5)$, satisfont uniquement à

$$\alpha' \geq \gamma' > \beta' > 0, \quad \alpha' + \gamma' - 4\beta' > 0, \quad \alpha' + \gamma' - 2\beta' \equiv 0 \pmod{4}.$$

Le coefficient cherché, σ_N , est donc aussi égal au nombre des formes ψ .

Les inégalités montrent que le point représentatif de ψ est dans le quadrilatère curviligne MKOHQPM. En procédant comme plus haut, on établit ce qui suit, où (a, b, c) désigne encore une réduite impropre quelconque, de discriminant $3(8N+5)$.

1° $c \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\begin{aligned} \text{si } b > 0, \quad & \text{quand à la fois } c \leq 3a \quad \text{et} \quad a - c \equiv 2 \pmod{4}, \\ \text{si } b < 0, \quad & \text{quand} \quad a \equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

2° $a \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\begin{aligned} \text{si } b > 0, \quad & \text{quand} \quad c \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{si } b < 0, \quad & \text{quand} \quad a - c \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\text{si, à la fois, } a + 2b + c \leq 3a \quad \text{et} \quad c \equiv 0 \pmod{4}.$$

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod{3}$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\text{si } a \equiv 0 \pmod{4}.$$

Cela posé, σ_N , égal au nombre des formes φ , comme à celui des formes ψ , est la demi-somme de ces deux nombres.

On en conclut que $2\sigma_N$ est égal au nombre des classes de formes de l'ordre impropre, et de discriminant $3(8N+5)$.

En effet, soient (a, b, c) et $(a, -b, c)$ deux réduites opposées, non équivalentes (c'est-à-dire non ambiguës), représentant deux de ces classes, opposées entre elles; la relation $ac - b^2 \equiv 7 \pmod{8}$ montre que a et c ne sont pas simultanément $\equiv 2 \pmod{4}$. Dès lors, les deux Tableaux ci-dessus montrent aisément que, dans chacun des quatre cas, et quelles que soient les valeurs de a et $c \pmod{4}$, les deux classes (a, b, c) et $(a, -b, c)$ contiennent, *au total*, soit deux formes φ et pas de ψ ; soit deux formes ψ et pas de φ ; soit une forme φ et une forme ψ ; donc, deux classes opposées donnent deux unités dans le nombre total des formes φ et ψ , c'est-à-dire encore qu'une classe non ambiguë donne une unité dans ce nombre total.

Le même fait se vérifie pour une classe ambiguë.

Donc enfin, σ_N , égal à la moitié du nombre total des formes φ et ψ , est la moitié du nombre des classes impropres, de discriminant $3(8N+5)$.

Si $8N+5$ est multiple de 3, on constate que toute classe impropre de discriminant $3(8N+5)$ donne encore *une demi-unité* dans σ_N si elle ne contient pas 3 en facteur; si elle contient ce facteur, elle donne *deux unités*.

Donc enfin, dans tous les cas,

$$2\sigma_N = F_1[3(8N+5)] + 3F_1\left(\frac{8N+5}{3}\right),$$

le dernier F_1 étant nul si $8N+5$ n'est pas multiple de 3, ou encore

$$\mathfrak{L} = 2 \sum_q^{\frac{8N+5}{q}} \left| F_1[3(8N+5)] + 3F_1\left(\frac{8N+5}{3}\right) \right|,$$

car ici (n° 30) les F_1 sont égaux aux F .

92. Détermination de \mathfrak{N} . — On multiplie encore membre à membre les deux développements introduits à propos de \mathfrak{L} , au com-

mencement du n° 91; le coefficient de $\cos 2x$ dans le second membre nouveau, développé en série de Fourier, est $\mathfrak{N}q^{\frac{4}{3}}$.

On trouve, en opérant comme plus haut, que

$$\frac{1}{4}\mathfrak{N}q^{\frac{4}{3}} = \sum q^{\frac{2N+1}{3}}\omega_N,$$

ω_N étant le nombre des solutions entières x, y, z de

$$24N-1 = 2x^2 - 3z^2 - 6y^2,$$

vérifiant

$$0 < 3z < 2x, \quad -x < 3y < x.$$

En écrivant

$$24N-1 = 3(x-y-z)(x-y+z) - (x-3y)^2,$$

et faisant correspondre à la solution x, y, z successivement les deux formes

$$[x-y-z, x-3y, 3(x-y+z)] \quad [x-y+z, x-3y, 3(x-y-z)],$$

on trouve que ω_N est égal au nombre des classes de l'ordre impropre, de discriminant $24N-1$, ou que

$$\mathfrak{N} = 4 \sum_1 q^{\frac{2N-1}{12}} \Gamma(24N-1).$$

95. Développement de $\theta_1 H^2 \theta_1^2 \Pi_1 : \theta^2$. — Sans donner *in extenso* ce développement, qui nous serait inutile, disons seulement que les coefficients des termes en $\cos x$ et en $\cos 3x$ y sont respectivement

$$\mathfrak{N} = 2q^{\frac{1}{12}} \sum_{N=0}^{\infty} q^{\frac{2N+2}{3}} J(3N+2),$$

$$\mathfrak{N}' = q^{\frac{1}{3}} \sum_{N=0}^{\infty} q^N \left[J(N) + 3J\left(\frac{N}{3}\right) \right],$$

$J\left(\frac{N}{3}\right)$ étant nul si N n'est pas multiple de 3, et $J(0)$ étant égal à $-\frac{1}{4}$, comme d'ordinaire.

Les développements des expressions analogues à $H^2H_1^2\Theta_1; \Theta^2$ n'introduisent pas d'autres fonctions numériques que $\zeta, \Re, \Im, \mathfrak{L}$.

94. Développements auxiliaires. — En appliquant la méthode de Liouville (n° 5), et changeant ensuite x en $x + \frac{\pi}{3}$, on obtient les quatre développements

$$H \Theta H_1 = A \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+2m} \sin(6m+2)x,$$

$$H \Theta \Theta_1 = A q^{-\frac{1}{3}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+m} \sin(6m+1)x,$$

$$H_1 \Theta_1 H = A \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+2m} (-1)^m \sin(6m+2)x,$$

$$H_1 \Theta_1 \Theta = A q^{-\frac{1}{3}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+2m} (-1)^m \cos(6m+1)x,$$

A étant un coefficient que la méthode laisse indéterminé, et qu'on calcule en faisant $x = 0$ dans la dernière équation. On trouve ainsi

$$\eta_1 \theta_1 \theta = A q^{-\frac{1}{3}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+m} (-1)^m.$$

Mais on connaît la relation classique ⁽¹⁾

$$\eta_1 \theta_1 \theta = 2\pi^3,$$

étant posé

$$\eta_1 = q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{12}(6m+1)^2};$$

par suite

$$A = 2q^{\frac{1}{3}} \eta_1^2.$$

(1) Par exemple, voir WEBER, *Elliptische Functionen*, § 21.

93. Corollaires. — Dérivons en x les trois premières relations du numéro précédent, et faisons ensuite $x = 0$; en tenant compte de ce que $H'(0)$ est $\eta_1 \theta_1 \theta$, et remplaçant A par sa valeur, on trouve

$$\begin{aligned}\eta_1 \theta \quad \eta &= q^{\frac{1}{3}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (6m+2) q^{3m^2+2m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (6m+2) q^{\frac{(3m+1)^2}{3}}, \\ \eta_1 \theta_1 \eta &= q^{\frac{1}{3}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m (6m+2) q^{3m^2+2m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m (6m+2) q^{\frac{(3m+1)^2}{3}}, \\ \theta_1 \theta \quad \eta &= q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (6m+1) q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (6m+1) q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.\end{aligned}$$

On en déduirait immédiatement des conséquences arithmétiques, que nous laissons ici de côté parce qu'elles n'intéressent pas les nombres de classes.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES DES NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS.

96. Multiplions membre à membre les relations (nos **94** et **5**)

$$\begin{aligned}H_1 \Theta_1 H &= A \sum_{-\infty} q^{3m^2+2m} (-1)^m \sin(6m+2)x, \\ \eta_1^2 \theta_1 \theta \frac{HH_1}{\Theta^2} &= 8 \sum_v \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx,\end{aligned}$$

et égalons les termes indépendants de x dans les deux membres nouveaux. Nous trouvons, en tenant compte de la valeur de A , l'équation

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \zeta_4 q^{-\frac{1}{3}} &= \sum_n (-1)^n \frac{q^{3n^2+n+1} (3n+1)}{1+q^{6n+2}} \\ &\quad + \sum_n (-1)^n \frac{q^{3n^2-7n+3} (3n+2)}{1+q^{6n+4}}.\end{aligned}$$

Égalant ensuite, dans les deux membres, les coefficients de q^{N+1} , on

obtient sans difficulté la formule :

$$\sum_{m \geq 0} (-1)^m \left\{ F \left[24N + 16 - (6m + 1)^2 \right] + 3 F \left[\frac{24N + 16 - (6m + 1)^2}{9} \right] \right\} \\ = -2 \sum d \left(\frac{3}{d + d_1} \right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N + 4 = dd_1$, avec $d < d_1$, et d, d_1 étant de parités différentes ⁽¹⁾.

97. De même, en égalant, dans les deux membres du produit considéré au commencement du numéro précédent, les termes en $\cos x$, on obtient l'expression de $\pi \eta$, et la formule :

$$\sum_{m \geq 0} (-1)^m F[24N - (6m + 1)^2] = - \sum d \left(\frac{3}{d + d_1} \right);$$

la dernière somme s'étend aux décompositions $6N = dd_1$, avec $d < d_1$, d et d_1 étant de parités différentes, et un seul des deux étant multiple de 3.

98. En procédant de même à partir des développements de $\Pi_1 \Theta_1 \Pi$ et $\Pi \Theta_1 : \Theta^2$, on trouverait les expressions de $\pi \tau_1$, $\pi \eta$. De la première, on déduit cette formule

$$\sum_{m \geq 0} (-1)^m J \left[\frac{12N + 9 - (6m + 1)^2}{4} \right] = - \sum \delta \left(\frac{3}{\frac{\delta + \delta_1}{2}} \right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $12N + 9 = \delta \delta_1$, avec $\delta < \delta_1$, et un seul des deux facteurs δ, δ_1 étant multiple de 3.

(1) $\left(\frac{3}{d + d_1} \right)$ est le symbole de Jacobi. Ici, $d + d_1$ ne peut être multiple de 3, car $dd_1 \equiv 1 \pmod{3}$. Au premier membre, la seconde fonction F est nulle si $24N + 16 - (6m + 1)^2$ n'est pas multiple de 9.

99. *Formules du premier type de Liouville.* — Multiplions membre à membre les relations (nos 66 et 94),

$$\gamma_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Pi_1 \Theta_1 \Pi}{\Theta^3} = 8 \sum_0 \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx,$$

$$\frac{1}{A} \Pi \Theta \Pi_1 = \sum_{-\infty} q^{3m^2+2m} \sin(6m+2)x,$$

et égalons, dans les développements des deux membres nouveaux, les termes indépendants et les termes en $\cos x$; nous obtenons ainsi les valeurs de

$$\xi \theta_1 \theta_1 \quad \text{et} \quad \Re \theta_1 \theta_1.$$

Par exemple, on a

$$\xi q^{-\frac{1}{3}} \theta_1 \theta_1 = 4 \sum_0 (3m+1)^2 \frac{q^{3m^2+5m+1}}{1 - q^{6m+2}} - 4 \sum_0 (3m+2)^2 \frac{q^{3m^2+7m+3}}{1 - q^{6m+4}}.$$

Si maintenant on remplace $\theta_1 \theta_1$ par sa valeur (n° 93), on trouve, en égalant les coefficients de q^{2N+1} dans les deux membres, la formule :

$$\sum_{m=0} (6m+1) \left\{ F[24N+16 - (6m+1)^2] + 3F\left[\frac{24N+16 - (6m+1)^2}{9}\right] \right\}$$

$$= 2 \sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N+4 = dd_1$, $d < d_1$ et d, d_1 de parités différentes.

L'expression de $\Re \theta_1 \theta_1$ conduit à la formule :

$$\sum_{m=0} (6m+1) F[24N - (6m+1)^2] = - \sum \left(\frac{d+d_1}{3}\right) d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N = dd_1$, $d < d_1$, d et d_1 de parités différentes, et un seul des deux multiple de 3.

De même, en formant $\mathfrak{A}\eta\theta\eta_1$, on aura

$$\sum_{m \geq 0} (3m+1) J[3N - (3m+1)^2] = \sum \left(\frac{\partial + \partial_1}{3} \right) \partial^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $3N = \partial\partial_1$, avec $\partial < \partial_1$, ∂ et ∂_1 de même parité, et un seul des deux étant multiple de 3. Dès lors cette somme est nulle si N est impairement pair.

100. *Relations où intervient la forme $x^2 + 3y^2$.* — On peut obtenir, d'une manière simple, des formules qui rappellent celles du second type de Kronecker.

Multiplions, en effet, par η les deux membres la relation classique (n° 9),

$$\eta_1^2 \theta_1 = 4 \sum_0 q^{\nu + \frac{1}{2}} \Gamma(\nu + 2),$$

il vient, en utilisant l'expression de η_1, θ_1, η (n° 95),

$$\eta_1 \sum_{-\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} (-1)^m (6m+2) = 4 \sum_0 q^{\nu + \frac{1}{2}} \Gamma(\nu + 2) \times \sum_{-\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

D'où, en égalant les coefficients de $q^{N + \frac{7}{12}}$, la formule :

$$4 \sum_{m \geq 0} (-1)^m \Gamma \left[\frac{13N+7-(6m+1)^2}{3} \right] = \sum b (-1)^{\frac{b}{2}-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $12N+7 = 3a^2+b^2$, avec $a \geq 0$; $b > 0$, et de plus b (qui est nécessairement pair) étant du type $6h+2$.

En opérant de même sur la relation

$$\eta_1 \theta_1^2 = 4 \sum_0 q^{\nu + \frac{1}{2}} \Gamma(\nu + 1),$$

on trouve

$$4 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0}} (-1)^m F \left[\frac{12N + 4 - (6m+1)^2}{3} \right] = 2 \sum b(-1)^{b-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $3N+1 = 3a^2 + b^2$, avec $a \leq 0$; $b \geq 0$, et b étant $\equiv 1 \pmod{3}$.

101. *Relations où intervient la forme indéfinie $x^2 - 6y^2$.* — En multipliant membre à membre la relation (n° 14) :

$$\frac{1}{\theta(q^2)} \Pi \Pi_1 = 2 \sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \sin(4m+2)x,$$

et celle qui donne $\tau_1 \theta_1 \theta \Pi_1 \Theta_1 \Pi : \Theta^2$ (n° 4), on obtient les expressions de

$$\mathcal{E} \theta(q^2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} \theta(q^2),$$

qui conduisent immédiatement aux formules suivantes. D'abord :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0} (-1)^m \left[F(24N+15 - 24m^2) + 3 F\left(\frac{8N+5-8m^2}{3}\right) \right] \\ &= -2 \sum (x-3y)(-1)^{\frac{x}{4}}, \end{aligned}$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $16N+10 = x^2 - 6y^2$, avec $y > 0$; $x > 3y$ [x est nécessairement $\equiv 0 \pmod{4}$]. Ensuite :

$$\sum_{m \leq 0} (-1)^m F(24N-1-24m^2) = - \sum y \left(\frac{-1}{y} \right) (-1)^{\frac{y-2}{4}},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $48N-2 = x^2 - 6y^2$, avec $y > 0$; $x > 3y$ [x est nécessairement $\equiv 2 \pmod{4}$].

102. Si l'on multiplie l'un par l'autre les développements de

$$\frac{1}{\Lambda} \Pi_1 \Theta_1 \Pi \quad \text{et} \quad \tau_1 \theta_1 \theta \frac{\Theta}{\Theta^2}$$

(ce dernier déduit par dérivation du développement classique de $\eta, \theta, \theta : \Theta$), on trouve sans difficulté, en se reportant à la première formule du n° 45, et calculant le terme indépendant et celui en $\cos 2x$ du produit, les deux relations suivantes. D'abord :

$$6 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \leq 0}} (-1)^m F_1 \left[\frac{24N+19-(6m+1)^2}{6} \right] = - \sum \left(\frac{3}{x} \right) (x-3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N+19 = x^2 - 6y^2, \quad y > 0, \quad x > 3y.$$

Ensuite :

$$6 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \leq 0}} (-1)^m F_1 \left[\frac{24N+1-(6m+1)^2}{6} \right] = - \sum \left(\frac{3}{x} \right) (x-3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N+1 = x^2 - 6y^2, \quad y \geq 0, \quad x > 3y.$$

Toutefois, si $24N+1$ est un carré, a^2 , le terme $-\left(\frac{3}{a}\right)a$, qui provient de la représentation $x=a, y=0$, doit être divisé par 2 (1).

(1) L'impression de ce Travail était terminée quand j'ai eu communication de trois intéressants Mémoires, dont deux en langue tchèque, de M. Karel Petr, professeur à l'Université de Prague (*Acad. des Sciences de Bohême*, 1900-1901). M. Petr a complété, comme je l'ai fait (n° 8), la formule initiale d'Hermite, et donné les deux développements (9) et (10). Il en a déduit les formules (35) et (36) du premier type de Liouville et celles (40) à (44) du second type; enfin il a obtenu trois des formules du Chapitre IV, où figure la classe x^2-2y^2 . C'est donc à lui que revient le mérite d'avoir fait apparaître une forme indéfinie dans les applications arithmétiques des fonctions elliptiques.

Lors du Centenaire d'Abel, le monde entier a témoigné par sa grandiose participation en quelle haute estime on avait ce génie transcendant.

Au moment où ils se disposent à lui élever un monument digne de lui, ses compatriotes ont cru ne pas devoir donner à leur manifestation un caractère exclusif, mais ont trouvé qu'ils rendraient mieux hommage au caractère international de l'œuvre d'Abel, en conviant les mathématiciens des autres nations à collaborer avec les Norvégiens.

Le monument, qui aura 13^m de hauteur, est achevé en plâtre et prêt à être coulé en bronze. Il est dû au ciseau de Gustav Vigeland, le premier des sculpteurs norvégiens. Sur un haut piédestal planent deux génies de taille gigantesque sur le dos desquels repose le jeune voyant, dont les traits rendent, en une mâle adaptation, ceux de l'illustre Abel. Cette œuvre a excité l'admiration de connaisseurs distingués, même en dehors des limites de la Norvège.

Il s'agit ici de la mémoire d'un homme par lequel la Norvège a apporté une part contributive tout à fait unique à l'œuvre scientifique de tous les pays et de tous les âges : c'est pourquoi nous nous adressons en toute confiance à l'ensemble du monde savant.

W. C. BRÖGGER. ELLING HOLST. FRIDTJOF NANSEN.

CARL STÖRMER. L. SYLOW. AXEL THUE.

Kristiania, mars 1907.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME III.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

	Pages.
[I] Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires; par M. <i>Camille Jordan</i>	5
[D3] Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hyper- complexe, correspondent à la monogénéité; par M. <i>Léon</i> <i>Auoune</i>	53
[D2d] Recherches sur les fractions continues algébriques; par M. <i>Auric</i> .	105
[R] Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme; par M. <i>E. Mathy</i>	207
[Ae] Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables; par M. <i>Camille Jordan</i>	213
[D3] Sur la croissance des fonctions multiformes; par M. <i>Georges</i> <i>Rémoudos</i>	267

	Pages.
[I24c] Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants; par M. <i>Edmond Maillet</i>	299
[I14] Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives; par M. <i>G. Humbert</i>	337

FIN DU TOME III DE LA SIXIÈME SÉRIE.



QA
1
J684
sér.6
t.3

Journal de mathématiques
pures et appliquées

Physical
Applied
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

